ΠΑΝΕΜΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΟΥ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

« **Σχεδιασμός Μαθήματος και Ανάπτυξη Διδακτικού Υλικού σε Σύγχρονα Περιβάλλοντα Μάθησης**»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

"Η διδακτική προσέγγιση της έννοιας του εμβαδού επίπεδων σχημάτων με τη χρήση γεωπίνακα"

Μελιτζάνη Αθηνά

Επιβλέποντες καθηγητές: Κωνσταντίνος Χατζηκυριάκου

Τριαντάφυλλος Α. Τριανταφυλλίδης

Στέφανος Ασημόπουλος

Βόλος, 2019

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και το συνακόλουθο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.) για τα Μαθηματικά στο δημοτικό σχολείο, μία από τις βασικές θεματικές ενότητες στα πλαίσια της διδασκαλίας της «Γεωμετρίας» είναι η μέτρηση της επιφάνειας επίπεδων σχημάτων. Η σημασία της κατανόησης της γεωμετρικής έννοιας του «Εμβαδού» και της μέτρησης αυτού σχετίζεται άμεσα με την ικανότητα διαχείρισης καθημερινών προβλημάτων, που αντιμετωπίζει το άτομο, αλλά και με την δυνατότητα κατανόησης άλλων μαθηματικών εννοιών καθώς και άλλων επιστημών ευρύτερα. Ωστόσο σύμφωνα με διεθνείς έρευνες, οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στη προσπάθειά τους να προσεγγίσουν τη γεωμετρική έννοια του «Εμβαδού» και της μέτρησής του. Οι δυσκολίες αυτές οφείλονται σε μεγάλο βαθμό σε λανθασμένες ιδέες που διαμορφώνουν οι μαθητές γύρω από την έννοια της μέτρησης του εμβαδού. Στα πλαίσια της παρούσας επιστημονικής διερεύνησης, διεξήχθη μία μελέτη περίπτωσης, τα αποτελέσματα της οποίας έρχονται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα πολλών διεθνών ερευνών, βάσει των οποίων η διδασκαλία της έννοιας του «Εμβαδού» και της μέτρησης αυτού με τη χρήση χειραπτικών υλικών, όπως ο γεωπίνακας και σε συνδυασμό με τη διδακτική αξιοποίηση της τεχνικής της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας φαίνεται να συμβάλλουν στην ουσιαστική κατανόηση αυτής της έννοιας και στην αντίληψη της διαδικασίας της μέτρησης του εμβαδού από τους μαθητές. Αξιοσημείωτο συμπέρασμα της έρευνάς μας είναι ότι η διδασκαλία της θεματικής ενότητας του «Εμβαδού» που βασίζεται στην εμβαδική προσέγγιση του Πυθαγορείου Θεωρήματος δείχνει να συμβάλλει στη κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και της μέτρησης αυτού.

ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: Εμβαδόν • Μέτρηση • Χειραπτικά υλικά • Ομαδοσυνεργατική μέθοδος διδασκαλίας • Πυθαγόρειο Θεώρημα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία αποτελεί την παρουσίαση μιας επιστημονικής έρευνας, η οποία διεξήχθη στα πλαίσια εκπόνησης Μεταπτυχιακής Διατριβής και αφορά στη διερεύνηση της δυνατότητας βελτίωσης του τρόπου διδασκαλίας της γεωμετρικής έννοιας του «Εμβαδού» κατά το μάθημα της Γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο.

Αφορμή για τη συγκεκριμένη διερεύνηση στάθηκε το ενδιαφέρον προς τη σχεδίαση ενός τρόπου διδασκαλίας της γεωμετρικής έννοιας του «Εμβαδού», ο οποίος θα αποσκοπεί στην καλλιέργεια της γεωμετρικής συλλογιστικής και της έννοιας του χώρου, έτσι όπως ο Pierre van Hiele και η Dina van Hiele-Geldof πρότειναν. Μάλιστα το ενδιαφέρον γύρω από αυτή τη διερεύνηση πυροδοτήθηκε από την ανάδειξη της αναγκαιότητας να απαγκιστρώσουμε τη διδασκαλία της Γεωμετρίας και τους μαθητές από τους μηχανικούς τύπους για τον υπολογισμό του εμβαδού επίπεδων σχημάτων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ακρογωνιαίος λίθος για το σχεδιασμό της διδακτικής πρότασης, που παρουσιάζεται στα πλαίσια της παρούσας επιστημονικής έρευνας, στάθηκε η προσέγγιση που προτείνεται από τον Χατζηκυριάκου (2002) για τη διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας του πυθαγορείου θεωρήματος σε συνδυασμό με τη χρήση χειραπτικών μαθησιακών εργαλείων στο πλαίσιο της διδασκαλίας του εμβαδού στο δημοτικό σχολείο. Όπως υποστηρίζεται από τον Χατζηκυριάκου (2002) μια τέτοια διδακτική προσέγγιση αφενός μπορεί να συμβάλλει στη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του εμβαδού από τους μαθητές και αφετέρου μπορεί να οδηγεί τους μαθητές με παιδαγωγικά και μαθηματικά ορθό τρόπο στη μαθηματική αποδεικτική μέθοδο του πυθαγορείου θεωρήματος, που θα γνωρίσουν μετέπειτα στα μαθηματικά του Γυμνασίου.

Παράλληλα η διδακτική πρόταση, που σχεδιάστηκε στα πλαίσια της παρούσας έρευνας, συμπεριέλαβε και τη διδακτική αξιοποίηση της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας, καθώς σύμφωνα με έρευνες που έχουν διεξαχθεί στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης, η συγκεκριμένη μέθοδος διδασκαλίας συμβάλλει σημαντικά στη βελτίωση των ακαδημαϊκών επιδόσεων των μαθητών.

Σύμφωνα με τον Van de Walle (2001/2005) η διδασκαλία της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο θα πρέπει να περιλαμβάνει γεωμετρικές δραστηριότητες με χειραπτικά υλικά, κατάλληλες για τους μαθητές του δημοτικού. Οι δραστηριότητες εμβαδών μπορούν να γίνουν αποτελεσματικότερες, όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν μη τυπικές μονάδες μέτρησης του εμβαδού, όπως γεωπίνακες, χαρτονένια τετράγωνα κ.α. Οι δραστηριότητες της μη τυπικής γεωμετρίας προσφέρουν στα παιδιά την ευκαιρία να διερευνήσουν, να αισθανθούν και να δουν, να χτίσουν και να αποσυναρμολογήσουν, να κάνουν παρατηρήσεις για τα σχήματα στον κόσμο που τους περιβάλλει. Οι δραστηριότητες αυτές συνεπάγονται τη δημιουργία, την οπτική απεικόνιση, τη σύγκριση, το μετασχηματισμό και την ταξινόμηση γεωμετρικών σχημάτων (Van de Walle, 2001/2005). Αξιοποιώντας όλες αυτές τις ιδέες, στόχος της διδακτικής πρότασης που παρατίθεται στα πλαίσια της παρούσας έρευνας, είναι η καλλιέργεια της ιδέας ότι το εμβαδόν είναι μία μέτρηση επικάλυψης, η οποία δεν απαιτεί τη χρήση αλγοριθμικών τύπων υπολογισμού του εμβαδού.

Έτσι λοιπόν αναγνωρίζοντας το ρόλο της ανεπίσημης Γεωμετρίας στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, η παρούσα έρευνα μελετά τις επιδόσεις μαθητών στα πλαίσια της διδασκαλίας της γεωμετρικής έννοιας του εμβαδού, μέσα από χειραπτικές ελκυστικές δραστηριότητες που προωθούν το πνεύμα της διερεύνησης και της ομαδοσυνεργατικής μάθησης.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας, που αποτελεί το θεωρητικό σκέλος αυτής, παρουσιάζεται μια ανασκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας για τη χρήση χειραπτικών υλικών και την ομαδοσυνεργατική μέθοδο διδασκαλίας στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Επιπλέον παρατίθενται ερευνητικά δεδομένα σχετικά με την αποτελεσματικότητα της χρήσης των χειραπτικών υλικών και της διδακτικής αξιοποίησης της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου μάθησης κατά τη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Όπως επίσης αναφέρεται το χειραπτικό υλικό και το ομαδοσυνεργατικό μοντέλο διδασκαλίας, που επιλέχθηκαν κατά το σχεδιασμό και την υλοποίηση της διδακτικής εφαρμογής, που προτείνεται μέσω της έρευνας. Τέλος, καταγράφονται οι λανθασμένες αντιλήψεις και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και οι μαθήτριες γύρω από την έννοια του «Εμβαδού», όπως αυτές παρουσιάζονται από διεθνείς έρευνες.

Το δεύτερο μέρος της εργασίας αποτελεί το ερευνητικό σκέλος της και περιγράφει τη μεθοδολογία της έρευνας που ακολουθήθηκε, αλλά και τη διδακτική διαδικασία, όπως αυτή διαμορφώθηκε στα πλαίσια της διδακτικής παρέμβασης που εφαρμόστηκε ως μέθοδος συλλογής ερευνητικών δεδομένων. Τέλος παρουσιάζονται και αναλύονται τα ερευνητικά αποτελέσματα και δίνονται προεκτάσεις μέσω διατύπωσης συμπερασμάτων και προτάσεων για περαιτέρω επιστημονική διερεύνηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι: Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΧΕΙΡΑΠΤΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Σύμφωνα με τη Szendrei (1996), ήδη από τα αρχαία χρόνια συγκεκριμένα συμπαγή φυσικά χειραπτικά υλικά, όπως χάντρες, κόμποι σε κορδόνια, σημάδια από κάψιμο σε ξύλινες δοκούς, λειτουργούσαν σαν σύμβολα των φυσικών αριθμών και χρησιμοποιούνταν με σκοπό την απαρίθμηση διάφορων αντικειμένων ή και ως εργαλεία για την εύρεση των αποτελεσμάτων των μαθηματικών πράξεων. Μάλιστα από πολύ νωρίς, κατά τον 11^{ο} αιώνα, η κατασκευή ενός άβακα από τον εκπαιδευτικό και μετέπειτα Πάπα Gerbert συνέβαλε στην αναπαράσταση των φυσικών αριθμών, της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και στη σύνδεση της γραφής των φυσικών αριθμών και των αριθμητικών πράξεων (Szendrei, 1996). Πρόκειται για έναν άβακα που περιελάμβανε δίσκους, καθένας από τους οποίους αντιστοιχούσε σε ένα αριθμητικό ψηφίο. Συνάμα, κατά τον 16^{ο} αιώνα μέσω του καλλιτέχνη Jacobo Barbari στερεά μοντέλα, όπως ο χάρακας, ο διαβήτης, η επίπεδη επιφάνεια, χρησιμοποιούνται ευρέως στη γεωμετρία.

Ωστόσο, το 1482 παρατηρείται ότι χειραπτικά υλικά, όπως αυτά που αναφέρθηκαν παραπάνω, δεν αποτελούν πλέον εργαλεία στην αριθμητική για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος (Szendrei, 1996). Στην ουσία πρόκειται για μια περίοδο, οπότε η εκπαίδευση εστιάζει κυρίως στην διδασκαλία μηχανικών μεθόδων με σκοπό την εκμάθηση μαθηματικών κανόνων. Ταυτόχρονα η ουσιαστική κατανόηση των διάφορων αλγορίθμων από τον μαθητή είναι δευτερευούσης σημασίας (Szendrei, 1996). Στροφή διαπιστώνεται στα μέσα του 18^{ου} αιώνα, όταν οι συγγραφείς των σχολικών εγχειριδίων αρχίζουν να δικαιολογούν τις μαθηματικές μεθόδους (Szendrei, 1996). Αρχικά, τα παιδαγωγικά βιβλία του Comenius επηρέασαν ιδιαίτερα την εκπαίδευση. Βασική διδακτική πρόταση του Comenius ήταν ότι οι μαθητές πρέπει να μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τα αισθητήρια όργανά τους και όχι απλά να χρησιμοποιούν λέξεις, γι’ αυτό και πρότεινε τη χρήση αντικειμένων της καθημερινής πραγματικής ζωής ή ακόμα και τη χρήση εικόνων τέτοιων αντικειμένων, ως διδακτικά μέσα στα πλαίσια της διδασκαλίας στην τάξη (Szendrei, 1996). Αντίστοιχα και ο

Pestalozzi επεσήμανε τη σημασία της απόκτησης αισθητηριακών εμπειριών από τους μαθητές, κατά τη διδασκαλία της αριθμητικής (Szendrei, 1996).

Σταδιακά αποδεικνύεται ότι τα σχολικά μαθηματικά βρίσκουν πρακτικές εφαρμογές στην καθημερινή ζωή, μέσα από την εμπλοκή στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων που σχετίζονται με βάρη, ταχύτητες, κ.λπ. (Szendrei, 1996). Αξιοσημείωτο μάλιστα είναι το γεγονός ότι ο 1909 ο Charles Laisant, στο έργο του 'Initiation Mathématique', συμβουλεύει τους γονείς που θέλουν τα παιδιά τους να έχουν μια καλή μαθηματική παιδεία, να ερευνήσουν κατά πόσο το σχολικό εργαστήριο του σχολείου, στο οποίο φοιτούν τα παιδιά τους, είναι εμπλουτισμένο με εργαλεία, όπως βαρίδια, μέτρα και άλλα χωρομετρικά εργαλεία (Beke & Mikola, 1909, όπ. αναφ. στο Szendrei, 1996). Παράλληλα τους προτείνει να απομακρύνουν τα παιδιά τους από αυτό το σχολείο, σε περίπτωση που διαπιστώσουν την έλλειψη τέτοιων εργαλείων (Beke & Mikola, 1909, όπ. αναφ. στο Szendrei, 1996).

Η Szendrei (1996) αναλύοντας όλα τα παραπάνω συνοψίζει ότι τα εργαλεία επίδειξης αποτελούν τη λύση σε πολλά προβλήματα της μαζικής εκπαίδευσης και τεκμηριώνει τη θέση της τονίζοντας πως η χρήση χειραπτικών υλικών από τον εκπαιδευτικό κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών συμβάλλει στην αμεσότερη παρουσίαση των μαθηματικών ιδιοτήτων, στην επεξήγηση μαθηματικών ιδεών και διαδικασιών και γενικά στη διαμόρφωση ενός αποτελεσματικού μαθησιακού περιβάλλοντος. Εξάλλου αρκετές έρευνες δείχνουν ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν χειραπτικά υλικά (manipulatives) κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, εμφανίζουν καλύτερες μαθηματικές επιδόσεις σε σύγκριση με τους μαθητές που δε χρησιμοποιούν αντίστοιχα υλικά (Driscoll, 1983· Greabell, 1978· Raphael & Wahlstrom, 1989· Sowell, 1989· Suydam, 1986, όπ. αναφ. στο Moyer, 2001).

Από την άλλη πλευρά όμως, δε μπορούμε να παραβλέψουμε τη θέση ότι τα χειραπτικά υλικά σε καμία περίπτωση δε μπορούν να αποτελέσουν την πανάκεια στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών, καθώς δεν θεωρούνται φορείς των μαθηματικών νοημάτων (Ball, 1992, όπ. αναφ. στο Moyer, 2001). Μολονότι προωθούν τους μαθητές να σκεφτούν μέσω της κιναισθητικής εμπειρίας που προσφέρουν, η ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών δεν επέρχεται μόνο μέσω των κινήσεων (Ball, 1992, όπ. αναφ. στο Moyer, 2001).

1.1 Τα είδη των χειραπτικών υλικών στη Μαθηματική Εκπαίδευση και ο ρόλος τους

Ένας βασικός στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι να αναπτύξουν οι μαθητές την ικανότητα να περιγράφουν και να ερμηνεύουν τον πραγματικό κόσμο και τον κόσμο των μαθηματικών με μαθηματικούς όρους (Κόλεζα, 2009). Εν ολίγοις, μέσα από τη διδασκαλία των μαθηματικών επιδιώκεται οι μαθητές να αποκτήσουν τη δομική και λειτουργική αντίληψη των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών (Κόλεζα, 2009).Τα χειραπτικά υλικά, που χρησιμοποιούνται ως μοντέλα αναπαράστασης για τις διάφορες μαθηματικές έννοιες, αποτελούν εξαιρετικά χρήσιμα εργαλεία, τα οποία παρέχονται από τον εκπαιδευτικό στους μαθητές με σκοπό να τους βοηθήσει να «μάθουν» τα μαθηματικά (Van de Walle, 2001/2005).

Ως εκ τούτου θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα χειραπτικά υλικά σε αρκετές περιπτώσεις μπορούν να λειτουργήσουν ως βοηθητικό υλικό στα χέρια του εκπαιδευτικού και των μαθητών σε μια προσπάθεια οικοδόμησης των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές. Εξάλλου σύμφωνα με τον Van de Walle (2001/2005, σ.44) «Το *μοντέλο μιας μαθηματικής έννοιας* μπορεί να είναι οποιοδήποτε αντικείμενο, εικόνα ή σχέδιο το οποίο την αναπαριστά ή στο οποίο μπορεί να επιβληθεί η σχέση για αυτή την έννοια».

Ωστόσο χρειάζεται να υπογραμμίσουμε ότι ένα μοντέλο μιας μαθηματικής έννοιας δεν «απεικονίζει» μια έννοια, όπως θα θέλαμε να πιστεύουμε, καθώς η απεικόνιση προϋποθέτει επίδειξη (Van de Walle, 2001/2005). Κατ' ουσίαν μόνο το μυαλό μας μπορεί να επιβάλλει τη μαθηματική σχέση στα αντικείμενα (Thompson, 1994, όπ. αναφ. στο Van de Walle, 2001/2005). Κάτι τέτοιο σημαίνει ότι ένα άτομο, το οποίο δεν έχει διαμορφώσει ακόμα αυτή τη σχέση στο νου του, βλέπει το μοντέλο απλώς ως ένα φυσικό αντικείμενο, που δεν απεικονίζει την έννοια (Van de Walle, 2001/2005).

Οι Clements και McMillen (1996) αναφέρουν ότι οι μαθητές χρειάζονται χειραπτικά υλικά για να οικοδομήσουν αρχικά τις ιδέες τους, αλλά έπειτα θα πρέπει να είναι σε θέση να αναλογίζονται τις ενέργειες που εκτέλεσαν κατά τη χρήση αυτών των υλικών. Αυτό είναι αναγκαίο, δεδομένου ότι επιδιώκεται οι μαθητές να αποκτήσουν μια σαφή και ισχυρή κατανόηση της μαθηματικής έννοιας, κάτι το οποίο δεν απορρέει μόνο από τη υλική παρουσία και εμφάνιση των διάφορων χειραπτικών υλικών (Clements & McMillen, 1996).

Έτσι λοιπόν οι Clements και McMillen (1996) διακρίνουν δύο τύπους σαφούς και ισχυρής γνώσης, ανάλογα με το πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα χειραπτικά υλικά, που χρησιμοποιούν κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών: η *αισθητηριακή – συγκεκριμένη γνώση* και η *ενσωματωμένη – συγκεκριμένη γνώση*. Ο όρος *αισθητηριακή – συγκεκριμένη γνώση* αναφέρεται στην γνώση, που διαθέτουν οι μαθητές στα πρώτα επίπεδα μαθηματικής εκπαίδευσης, όταν χρησιμοποιούν αισθητηριακά υλικά για να αναπαραστήσουν μια μαθηματική έννοια, όπως για παράδειγμα την έννοια της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης (Clements & McMillen, 1996). Από την άλλη πλευρά, ο όρος *ενσωματωμένη – συγκεκριμένη γνώση* αναφέρεται στη γνώση που διαθέτουν οι μαθητές κατά τη διαδικασία της μάθησης, όταν δηλαδή οι μαθητές μπορούν πλέον να συσχετίσουν τα διάφορα χειραπτικά υλικά και τις ενέργειές τους με τη μαθηματική έννοια, στα πλαίσια μιας ισχυρής νοητικής διεργασίας (Clements & McMillen, 1996).

Στην πρώτη περίπτωση, το πόσο σαφής και ισχυρή είναι η γνώση του μαθητή ως προς το χειραπτικό υλικό που χρησιμοποιεί, εξαρτάται από το συνδυασμό των ξεχωριστών μαθηματικών αρχών που αναδύονται στο νου του κατά τη χρήση του υλικού (Clements & McMillen, 1996). Αντίστοιχα στη δεύτερη περίπτωση, το πόσο σαφής και ισχυρή είναι η γνώση του μαθητή ως προς το χειραπτικό υλικό, εξαρτάται από την ικανότητα του μαθητή να συνδυάσει τις διάφορες μαθηματικές αρχές, που αναδύονται κατά τη χρήση του υλικού ώστε να οικοδομήσει μια νέα γνώση (Clements & McMillen, 1996).

Συμπερασματικά μια μαθηματική ιδέα μπορεί να θεωρηθεί *αισθητηριακή – συγκεκριμένη*, *αφηρημένη*, *ενσωματωμένη – συγκεκριμένη*, ανάλογα με το κατά πόσο ο μαθητής μπορεί να τη συνδυάσει με άλλες ιδέες και να την εφαρμόσει σε άλλες περιστάσεις - δραστηριότητες (Clements & McMillen, 1996).

Η Szendrei (1996), με σκοπό να προσδιορίσει το ρόλο των χειραπτικών υλικών κατά τη μαθηματική εκπαίδευση, διακρίνει τρεις κατηγορίες χειραπτικών υλικών: τα *κοινά εργαλεία*, τα *εκπαιδευτικά υλικά* και τα *παιχνίδια*.

Αρχικά, ο όρος *κοινά εργαλεία* προσδιορίζει συγκεκριμένα φυσικά υλικά ή και διάφορες πολιτισμικές εφευρέσεις και κατασκευές του ανθρώπου, όπως φασόλια, βελανίδια, κάστανα και κοχύλια, θερμόμετρα, ημερολόγια, χρήματα, αριθμομηχανές τα οποία, ο θεράποντας ιατρός και ψυχολόγος, Ovid Decroly πρότεινε μέσω της μεθόδου του να χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία στην τάξη (Szendrei, 1996). Σύμφωνα λοιπόν με αυτή τη μέθοδο του Decroly η καταμέτρηση και ο υπολογισμός δε θα πρέπει να αποτελούν ένα διακριτό σχολικό αντικείμενο, αλλά θα πρέπει να λογίζονται ως δεξιότητες που εξασκούνται σε κάθε γνωστική λειτουργία και παρατήρηση των μαθητών (Szendrei, 1996).

Ωστόσο ο Comenius και ο Pestalozzi ανέδειξαν την ανάγκη κατασκευής και άλλων υλικών που θα υποστηρίζουν σημαντικά τη διδασκαλία των μαθηματικών (π.χ. ράβδοι Cuisenaire, γεωπίνακες, πεντόμινο, τάνγκραμ, κ.λπ.). Πρόκειται για τα *εκπαιδευτικά υλικά*, που παρουσίασε η Maria Montessori μέσω της εκπαιδευτικής της μεθόδου (Szendrei, 1996). Πιο συγκεκριμένα, η Montessori θεώρησε ότι η διαμόρφωση ενός κατάλληλου διδακτικού εξοπλισμού μπορεί να συμβάλλει στην προώθηση της αισθητηριακής, της κινητικής και της πνευματικής ανάπτυξης του παιδιού αλλά και στη διέγερση του ενδιαφέροντος του μαθητή (Szendrei, 1996).

Στα πλαίσια αυτής της μεθόδου, η Montessori προτείνει εξειδικευμένα υλικά που θα μπορούν να χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών, όπως οι αριθμοί, η διαδοχική σειρά των αριθμών, ο υπολογισμός, οι αριθμητικές πράξεις, το δεκαδικό σύστημα, τα επίπεδα γεωμετρικά σχέδια, τα γεωμετρικά στερεά (Szendrei, 1996). Η χρήση τέτοιου είδους εκπαιδευτικών υλικών κατά τη μαθηματική εκπαίδευση χρησιμεύει σε μια πιο εμφανή και ισχυρή διασύνδεση των μαθηματικών ιδιοτήτων με τις ιδιότητες των εκπαιδευτικών υλικών, διότι ελαχιστοποιείται η «φλύαρη» παρουσία και οι φανφάρες των *κοινών εργαλείων* (Szendrei, 1996). Ενώ παράλληλα η προσοχή του μαθητή επικεντρώνεται στη χρήση και στις ιδιότητες αυτών των υλικών. Με άλλα λόγια, τα *εκπαιδευτικά υλικά* είναι υλικά που προσχεδιάζονται και κατασκευάζονται με σκοπό να εξυπηρετήσουν τη διδασκαλία μαθηματικών ιδεών και διαδικασιών και επομένως ξεπερνούν τα μειονεκτήματα και τους περιορισμούς της χρήσης των *κοινών εργαλείων* (Szendrei, 1996).

Τέλος, ο Alan Bishop (1988, όπ. αναφ. στο Szendrei, 1996) αναφέρει ότι το *παιχνίδι* αποτελεί μια ακόμα καίρια δραστηριότητα κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Σύμφωνα με αυτήν την άποψη, τα *εκπαιδευτικά παιχνίδια* πρέπει να λαμβάνουν χώρα όχι μόνο εκτός της σχολικής τάξης, αλλά και εντός αυτής. Βέβαια, θα πρέπει να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι δεν είναι όλα τα εκπαιδευτικά παιχνίδια κατάλληλα για την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων, αλλά και ούτε ο εκπαιδευτικός μπορεί να βασιστεί μόνο σε ένα παιχνίδι, ώστε να επιφέρει τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα (Szendrei, 1996). Θα λέγαμε απλώς πως ένα παιχνίδι μπορεί να προωθήσει κατά ένα μέρος τη μαθηματική εκπαίδευση. Για παράδειγμα οι κανόνες ενός παιχνιδιού βοηθούν τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν πιο έμπρακτα τα διάφορα αξιακά συστήματα (Szendrei, 1996). Επίσης, τα παιχνίδια ευρύτερα προωθούν την εξάσκηση του συνδυαστικού και προβλεπτικού τρόπου σκέψης του ατόμου και προσελκύουν το ενδιαφέρον των μαθητών (Szendrei, 1996).

1.2 Δυσκολίες και λανθασμένοι χειρισμοί κατά τη χρήση των χειραπτικών υλικών

Η επιλογή των κατάλληλων διδακτικών υλικών, μέσα από αυτήν την ευρεία γκάμα, καθίσταται αρκετά δύσκολη για τον εκπαιδευτικό σε πολλές περιπτώσεις. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι πρωταρχικό ρόλο στον τρόπο επιλογής και χρήσης των διδακτικών υλικών στα πλαίσια της διδασκαλίας των μαθηματικών παίζει η εκπαιδευτική φιλοσοφία της εκάστοτε σχολικής μονάδας (Szendrei, 1996). Οι εκπαιδευτικές φιλοσοφίες των διάφορων εκπαιδευτικών συστημάτων μπορεί να διαφέρουν ως προς τους βασικούς σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης, ως προς τις ιδέες σχετικά με το πώς ένας μαθητής μπορεί να «μάθει μαθηματικά» και ως προς ποιες μαθηματικές έννοιες είναι αναγκαίο να διδαχθούν (Szendrei, 1996). Κατ’ επέκταση, οι διάφορες εκπαιδευτικές φιλοσοφίες διαφοροποιούνται ως προς τον τρόπο χρήσης των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών (Szendrei, 1996).

Παράλληλα πολλές έρευνες, που έχουν πραγματοποιηθεί γύρω από τη χρήση των χειραπτικών υλικών κατά τη μαθηματική εκπαίδευση, έχουν καταλήξει σε αντικρουόμενα πολλές φορές συμπεράσματα σε σχέση με την αποτελεσματικότητα των χειραπτικών υλικών ως υποστηρικτικά εργαλεία της μάθησης (Meira, 1998). Σε αυτό το σημείο λοιπόν κρίνεται σκόπιμο να επισημανθεί ότι η χρήση των χειραπτικών υλικών κατά την μαθηματική εκπαίδευση ελλοχεύει και αρκετούς κινδύνους.

Τέτοιοι κίνδυνοι συνήθως οφείλονται σε ακατάλληλες διδακτικές στρατηγικές που επιλέγει ο εκπαιδευτικός και σε λανθασμένο τρόπο χρήσης του διδακτικού υλικού κατά τη διδασκαλία (Moyer, 2001). Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός πως, σύμφωνα με έρευνες, τα μαθησιακά αποτελέσματα των μαθητών στα πλαίσια δραστηριοτήτων με χειραπτικά υλικά σχετίζεται άμεσα με τις εμπειρίες του εκπαιδευτικού με αυτά τα υλικά (Sowell, 1989· Raphael & Wahlstrom, 1989, όπ. αναφ. στο Moyer, 2001). Για παράδειγμα όταν καταχράται άσκοπα πολύς διδακτικός χρόνος με σκοπό ο εκπαιδευτικός να εκπαιδεύσει τους μαθητές ως προς τον τρόπο χρήσης των διάφορων υλικών (Szendrei, 1996). Συνάμα, δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις που οι εκπαιδευτικοί αξιοποιούν με λανθασμένο τρόπο διάφορα διδακτικά υλικά, καθώς δε διαθέτουν τις απαραίτητες γνώσεις γύρω από τη χρήση των υλικών αυτών, αλλά ούτε προσφέρουν την απαραίτητη ανατροφοδότηση στους μαθητές μετά τη χρήση κάποιου διδακτικού υλικού (Szendrei, 1996). Κατάχρηση των διδακτικών υλικών παρατηρείται και όταν οι μαθητές απλά καταλήγουν να απομνημονεύουν μία συσχέτιση της φυσικής παρουσίας του υλικού (π.χ. χρώμα) με τη μαθηματική έννοια ή όταν το υλικό χάνει την προσαρμοστικότητά του σε άλλες περιστάσεις και κρύβει περιορισμούς στη χρήση του (Szendrei, 1996).

Ακόμα ως μειονέκτημα συγκεκριμένων εκπαιδευτικών υλικών μπορεί να θεωρηθεί και η δυσκολία συσχέτισης του τρόπου χρήσης του διδακτικού υλικού με τον τρόπο χρήσης και εφαρμογής των μαθηματικών στην πραγματική ζωή και τις καθημερινές εμπειρίες των μαθητών, κάτι το οποίο ελαχιστοποιείται στις περιπτώσεις που χρησιμοποιούνται τα λεγόμενα *κοινά εργαλεία* (Szendrei, 1996). Μάλιστα, όσον αφορά τη χρήση των λεγόμενων εκπαιδευτικών παιχνιδιών αρκετοί είναι αυτοί που τάσσονται κατά αυτής, διότι θεωρούν ότι η χρήση τέτοιων υλικών μπορεί να ωθήσει τους μαθητές στην πεποίθηση ότι τα μαθηματικά, ως γνωστικό αντικείμενο, διαφέρουν από τις παιγνιώδεις καταστάσεις. Συνεπώς οι μαθητές είναι πιθανό να εκλάβουν τη διδασκαλία των μαθηματικών ως μία διαδικασία τιμωρίας – πειθαρχίας (Szendrei, 1996).

Επιπρόσθετα, δεδομένου ότι η μαθηματική εκπαίδευση περιλαμβάνει τη διδασκαλία αφηρημένων εννοιών και διαδικασιών, αρκετοί εκπαιδευτικοί αρνούνται να εμπλέξουν στη διδασκαλία τους συγκεκριμένα αντικείμενα όπως κύβους ή ράβδους, διότι πιστεύουν πως είναι εξαιρετικά δύσκολο η χρήση τέτοιων συγκεκριμένων υλικών να οδηγήσει τους μαθητές σε αφηρημένες μαθηματικές ιδέες (Szendrei, 1996). Τέλος, οι δυσκολίες που αναδύονται κατά τη χρήση τέτοιων διδακτικών υλικών μπορεί να οφείλονται ακόμα και σε πολιτισμικούς λόγους (Szendrei, 1996).

Μάλιστα σύμφωνα με την έρευνα της Moyer (2001) διαπιστώνεται ότι σε πολλές περιπτώσεις σχολικών τάξεων, όπου ακολουθείται το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας και ο εκπαιδευτικός κατευθύνει την πορεία διδασκαλίας και μάθησης, είτε οι μαθητές χρησιμοποιούντα χειραπτικά υλικά ακολουθώντας προσεκτικά τις οδηγίες του εκπαιδευτικού, είτε τα χειραπτικά υλικά έχουν θέση στη διδασκαλία ως μια διασκεδαστική δραστηριότητα ή ένα είδος παιχνιδιού, μόνον όταν υπάρχει περίσσιος χρόνος στο τέλος της διδακτικής ώρας. Ακόμα παρατηρείται συχνά, οι εκπαιδευτικοί να χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά μόνο στα πλαίσια επίδειξης κατά τη διδασκαλία, χωρίς να δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα να επεξεργαστούν τα υλικά αυτά μόνοι τους (Moyer, 2001).

Αυτές οι συμπεριφορές των εκπαιδευτικών ως προς τον τρόπο χρήσης των χειραπτικών υλικών στη σχολική τάξη απορρέουν από τις πεποιθήσεις που έχουν οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί γύρω από την χρήση αυτών των υλικών. Πιο συγκεκριμένα, αρκετοί εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι η διδασκαλία των μαθηματικών με τη χρήση χειραπτικών υλικών κάνουν τη διαδικασία μάθησης πιο διασκεδαστική για τους μαθητές, καθώς οι μαθητές φαίνονται να επιδεικνύουν περισσότερο ενδιαφέρον και να είναι πιο συμμετοχικοί (Moyer, 2001). Στα πλαίσια αυτής της θέσης, οι εκπαιδευτικοί τείνουν να χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά κατά τη διδασκαλία, επιδιώκοντας να κάνουν ένα διάλειμμα από την ρουτίνα της παραδοσιακής διδασκαλίας των μαθηματικών (Moyer, 2001). Ακόμα, δεν είναι λίγοι οι εκπαιδευτικοί που θεωρούν ότι τα χειραπτικά υλικά μπορούν να λειτουργήσουν ως ένα είδος επιβράβευσης μόνο για τους μαθητές που ακολουθούν σωστά τις οδηγίες του εκπαιδευτικού και εμφανίζουν την επιθυμητή συμπεριφορά (Moyer, 2001). Τέλος, αρκετοί εκπαιδευτικοί δείχνουν να φοβούνται ότι η χρήση αυτών των υλικών κατά τη διδασκαλία μπορεί να προκαλέσει αναστάτωση στην τάξη και να διαταραχθεί ο έλεγχος της πειθαρχίας (Moyer, 2001).

Τέτοιες πεποιθήσεις και συμπεριφορές των εκπαιδευτικών ως προς τη χρήση των χειραπτικών υλικών κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στη σχολική τάξη αναδεικνύουν την τάση πολλών εκπαιδευτικών να διαχωρίζουν τα «διασκεδαστικά μαθηματικά» από τα «πραγματικά μαθηματικά» (Moyer, 2001). Ο όρος «διασκεδαστικά μαθηματικά» αναφέρεται στις φάσεις διδασκαλίας των μαθηματικών, όπου οι μαθητές χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά για να εξερευνήσουν το νέο περιεχόμενο μάθησης στην αρχή της διδασκαλίας ή σε μια παιγνιώδη δραστηριότητα στο τέλος της διδασκαλίας. Από την άλλη πλευρά, ο όρος «πραγματικά μαθηματικά» αναφέρεται στη διδασκαλία του μαθηματικού περιεχομένου με τον παραδοσιακό τρόπο της διάλεξης και της γραπτής εξάσκησης σε δραστηριότητες (Moyer, 2001).

Εν κατακλείδι, θα πρέπει να υπογραμμιστεί ότι μέσω των απόψεων και των συμπεριφορών αυτών οι εκπαιδευτικοί στέλνουν έμμεσα ένα μήνυμα προς τους μαθητές σχετικά με το ρόλο των χειραπτικών υλικών κατά τη διδασκαλία (Moyer, 2001). Δηλαδή, υπονοείται εμμέσως ότι η ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών ιδεών επέρχεται μόνο όταν οι μαθητές μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τους αλγόριθμους των σχολικών εγχειριδίων. Ταυτόχρονα διαπιστώνεται μια αποστροφή των εκπαιδευτικών ως προς την ιδέα ότι οι μαθητές μπορούν να επινοήσουν τους δικούς τους αλγόριθμους, μέσα από τις εμπειρίες τους με μαθηματικές αναπαραστάσεις, όπως τα χειραπτικά υλικά (Moyer, 2001).

1.3 Στρατηγικές για αποδοτική διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικών υλικών

Παρά τους όποιους προβληματισμούς αναδύονται γύρω από τη χρήση των χειραπτικών υλικών κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, τα Προγράμματα Σπουδών και Αξιολόγησης για τα Σχολικά Μαθηματικά συνιστούν ότι η μάθηση των μαθηματικών θα πρέπει να βασίζεται σε εμπειρίες που σχετίζονται με πλευρές της καθημερινής ζωής των μαθητών ή στη χρήση συγκεκριμένων χειραπτικών υλικών κατάλληλα σχεδιασμένων ώστε να μπορούν να αντικατοπτρίζουν τις υποβόσκουσες μαθηματικές ιδέες, με σκοπό οι μαθητές να αποκτήσουν μια ισχυρή αίσθηση των αριθμών και των αριθμητικών σχέσεων (National Council of Teachers of Mathematics, 1998, όπ. αναφ. στο Meira, 1998). Εξάλλου τα διάφορα διδακτικά υλικά που μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών μπορούν να λειτουργήσουν ως «κίνητρα» για την πραγματοποίηση μιας εποικοδομητικής συζήτησης στα πλαίσια της διδασκαλίας (Rochelle, 1990, όπ. αναφ. στο Meira, 1998). Συμπερασματικά, οι μαθητές χρησιμοποιώντας διάφορα χειραπτικά υλικά μπορούν εκφράσουν και να αντιπαραβάλλουν προφορικά και γραπτά τα συμπεράσματά τους γύρω από διάφορες μαθηματικές έννοιες, να επιχειρηματολογήσουν γύρω από αυτές αλλά και να δημιουργήσουν τις δικές τους αναπαραστάσεις αυτών των μαθηματικών ιδεών, βασιζόμενοι στα υλικά που έχουν μπροστά τους (Meira, 1998).

Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψη το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε η Moyer (2001), ότι δηλαδή κάθε διδακτικό εργαλείο μπορεί να χρησιμοποιηθεί με σκοπό να καλύψει διαφορετικούς μαθησιακούς στόχους, σε διαφορετικά μαθησιακά περιβάλλοντα και σε διαφορετικούς βαθμούς «διαφάνειας», θα μπορούσαμε να γενικεύσουμε πως όταν οι εκπαιδευτικοί σχεδιάζουν και οργανώνουν προσεκτικά τις διδασκαλίες τους εφαρμόζοντας τις κατάλληλες διδακτικές στρατηγικές και επιλέγοντας τα κατάλληλα χειραπτικά υλικά, που μπορούν να έχουν υψηλό βαθμό «διαφάνειας», τότε η πιθανότητα μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας σίγουρα αυξάνεται.

Σύμφωνα με τον Meira (1998), η «διαφάνεια» των χειραπτικών υλικών αποτελεί μία ένδειξη πρόσβασης στη γνώση και στις δραστηριότητες, παρά ένα έμφυτο χαρακτηριστικό των εργαλείων. Η «διαφάνεια» κάθε εργαλείου εξαρτάται από τον τρόπο χρήσης του εργαλείου, τους χρήστες και το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο μέσα στο οποίο χρησιμοποιείται (Meira, 1998). Μάλιστα ο Meira (1998) συμπληρώνει ότι εάν ένα διδακτικό υλικό διαθέτει «επιστημονική πιστότητα», με την έννοια ότι η κατασκευή του υλικού έχει γίνει με τρόπο ώστε τα εγγενή του χαρακτηριστικά να προωθούν τη σύνδεση της χρήσης του με τη μαθηματική έννοια αλλά και διαθέτει επιστημονική ορθότητα, τότε ταυτόχρονα αυξάνεται και ο βαθμός της «διαφάνειας» του υλικού. Ως εκ τούτου ο βαθμός «διαφάνειας» ενός διδακτικού υλικού επηρεάζει ανάλογα το βαθμό αποτελεσματικότητας της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Πέρα όμως από το βαθμό «διαφάνειας» του διδακτικού υλικού, σημαντικό ρόλο στο βαθμό αποτελεσματικότητας της διδασκαλίας των μαθηματικών με τη χρήση χειραπτικού υλικού παίζει και ο εκπαιδευτικός. Αυτό αποδίδεται στο γεγονός ότι ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που θα διαμορφώσει κατάλληλα το μαθησιακό περιβάλλον της τάξης ώστε να προσφέρει στους μαθητές εμπειρίες με διάφορες αναπαραστάσεις των μαθηματικών ιδεών, που θα οδηγήσουν τους μαθητές στην ουσιαστική κατανόηση αυτών των αφηρημένων ιδεών (Moyer, 2001). Τα χειραπτικά υλικά από μόνα τους δεν είναι επαρκή και αποτελεσματικά, γι’ αυτό το λόγο είναι αναγκαίο ο εκπαιδευτικός να επιλέξει τα κατάλληλα χειραπτικά υλικά, να προσχεδιάσει τη διδασκαλία του και να έχει προκαθορίσει τον τρόπο χρήσης των χειραπτικών υλικών στα πλαίσια της διδασκαλίας του, στηριζόμενος πάντα στο μαθησιακό περιεχόμενο που πρόκειται να διδαχθεί, στις ανάγκες και τις δυσκολίες των μαθητών του.

Κατ’ επέκταση σύμφωνα με τους Clements και McMillen (1996) κάποιες γενικές αρχές που θα πρέπει να έχουν κατά νου οι εκπαιδευτικοί ώστε να επιλέγουν κατάλληλα και αποτελεσματικά χειραπτικά υλικά είναι οι ακόλουθες:

- Να επιλέγουν χειραπτικά υλικά, με γνώμονα το ότι πρόκειται για υλικά που θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές τους αυτόνομα και όχι οι ίδιοι.
- Να επιλέγουν χειραπτικά υλικά που θα επιτρέπουν στους μαθητές να επινοούν δικές τους ανεπίσημες μαθηματικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων και δε θα τους περιορίζουν στην προσπάθειά τους να νοηματοδοήσουν μαθηματικές έννοιες.

- Να επιλέγουν προσεκτικά χειραπτικά υλικά που προσχεδιάζονται από τον κατασκευαστή με σκοπό να εξυπηρετήσουν τη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών ιδεών[1], όπως οι ράβδοι Cuisenaire ή τα base - ten blocks.
- Να επιλέγουν χειραπτικά υλικά που μπορούν να εξυπηρετήσουν πολλούς σκοπούς, διότι η πολυλειτουργικότητα ενός υλικού επιτρέπει στους μαθητές να βρίσκουν πολλούς διαφορετικούς τρόπους χρήσης του.
- Να επιλέγουν ποιες αναπαραστάσεις μαθηματικών ιδεών θα παρέχουν στους μαθητές τους.
- Να προτιμούν να χρησιμοποιούν ένα χειραπτικό υλικό στην αρχή της διδασκαλίας μιας νέας μαθηματικής ιδέας και όχι πολλά διαφορετικά χειραπτικά υλικά γιατί κάτι τέτοιο μπορεί να αποσπάσει τους μαθητές.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι οι Clements και McMillen (1996) προτείνουν στους εκπαιδευτικούς συγκεκριμένες στρατηγικές που μπορούν να ακολουθούν με σκοπό να χρησιμοποιούν με αποτελεσματικό τρόπο τα χειραπτικά υλικά κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα, προτείνουν στους εκπαιδευτικούς να αυξήσουν τη χρήση χειραπτικών υλικών κατά τη διδασκαλία τους, διότι κρίνεται σκόπιμο οι μαθητές να μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά, ως εργαλεία για περαιτέρω μαθηματική σκέψη (Clements & McMillen, 1996). Έπειτα επισημαίνουν ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να γνωρίζουν ότι οι ανάγκες των μαθητών μπορεί να διαφοροποιούνται ως προς τη χρήση των χειραπτικών υλικών (Clements & McMillen, 1996). Δηλαδή, οι εκπαιδευτικοί δεν πρέπει να απαιτούν από όλους τους μαθητές να χρησιμοποιούν το ίδιο χειραπτικό υλικό. Αντιθέτως καλό είναι να τους δίνουν τη δυνατότητα επιλογής χειραπτικών υλικών, που τους βοηθούν καλύτερα να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες. Εξάλλου κάποιοι μαθητές μπορεί να προτιμούν απλώς τη μέθοδο «μολύβι και χαρτί», παρά κάποιο χειραπτικό υλικό (Clements & McMillen, 1996).

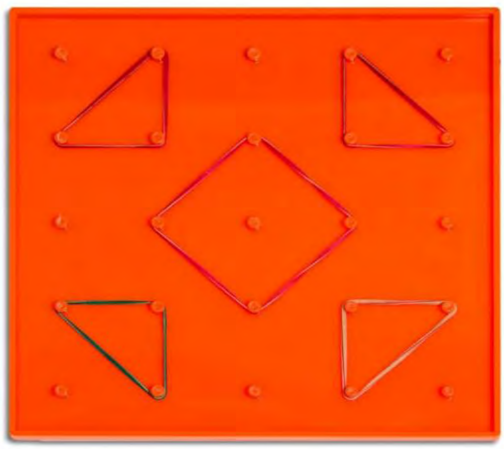
Επιπρόσθετα οι Clements και McMillen (1996) προτείνουν στους εκπαιδευτικούς να ενθαρρύνουν τους μαθητές τους ώστε να χρησιμοποιούν χειραπτικά υλικά για να επιλύουν προβλήματα και έπειτα να αναστοχάζονται και να δικαιολογούν αυτές τις μεθόδους επίλυσης, που επινοήσαν. Τέλος, επισημαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να γνωρίζουν πώς να χρησιμοποιούν τα χειρπτικά υλικά και να έχουν και οι ίδιοι

[1] Πρόκειται για τα λεγόμενα *εκπαιδευτικά υλικά*, όπως αναφέρθηκαν στην παράγραφο 1.1 του Κεφαλαίου Ι.

ανάλογες εμπειρίες με τέτοια υλικά, ώστε να μπορούν να κατευθύνουν ανάλογα τους μαθητές τους (Sowell, 1989, όπ. αναφ. στο Clements & McMillen, 1996).

1.4 Ο γεωπίνακας ως χειραπτικό υλικό στη μαθηματική εκπαίδευση

Ο γεωπίνακας (geoboard) είναι ένα χειραπτικό υλικό που επινοήθηκε από τον Άγγλο μαθηματικό και παιδαγωγό Caleb Cattegno (1911-1988) και χρησιμοποιείται ευρέως στη διδασκαλία βασικών αρχών και εννοιών της γεωμετρίας (Williams, 1999, όπ. αναφ. στο Scandrett, 2008, σ. 29-32). Οι γεωπίνακες είναι ένα από τα καλύτερα μέσα για την αναπαράσταση δισδιάστατων σχημάτων και κυκλοφορούν σε διάφορα μεγέθη και χρώματα. Επιπρόσθετα, οι γεωπίνακες είναι κατασκευασμένοι συνήθως από πλαστικό, έχουν τετραγωνική μορφή διαστάσεων 5×5 (Βλ. Σχήμα 1) ή 10×10 ή μπορεί να έχουν και κυκλική μορφή και συνοδεύονται από πολύχρωμα λαστιχάκια (Scavo, 1995). Ο τετραγωνικός γεωπίνακας διαστάσεων 5×5 καλύπτεται συνολικά από 25 προεξέχοντα καρφάκια (Βλ. Σχήμα 1), ενώ ο τετραγωνικός γεωπίνακας διαστάσεων 10×10 καλύπτεται συνολικά από 100 προεξέχοντα καρφάκια, πάνω στα οποία οι μαθητές και ο εκπαιδευτικός μπορούν να εφαρμόσουν τα πολύχρωμα λαστιχάκια με σκοπό να σχηματίσουν διάφορα επίπεδα σχήματα (Scavo, 1995).

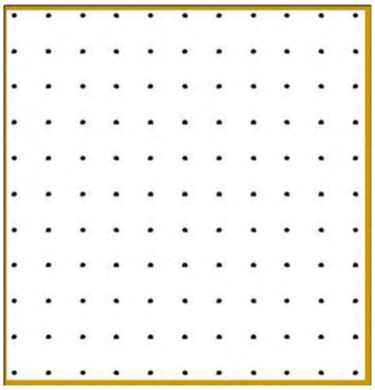


Σχ. 1 Τετραγωνικός γεωπίνακας διαστάσεων 5×5

Σύμφωνα με την Scandrett (2008, σ. 29-32), ο γεωπίνακας είναι ένα εκπαιδευτικό υλικό που μπορεί να λειτουργήσει σαν μια γνωστική «σκαλωσιά» για να διευκολύνει τον μαθητή να επεκτείνει τις γνώσεις του γύρω από τις μαθηματικές έννοιες της μέτρησης, του χώρου και της γεωμετρίας. Εξάλλου ο γεωπίνακας είναι ένα πολυχρηστικό χειραπτικό υλικό, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλα τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, έτσι όπως αυτά προτείνονται από τους Van Hiele, και μπορεί επίσης να εξυπηρετήσει στη διδασκαλία και τη μάθηση πολλών και διαφορετικών θεματικών περιοχών (Scandrett, 2008, σ. 29-32· Van de Walle, 2001/2005). Σύμφωνα με την Scandrett (2008, σ. 29-32), οι θεματικές περιοχές των μαθηματικών, κατά τη διδασκαλία των οποίων ο εκπαιδευτικός μπορεί να συμπεριλάβει δραστηριότητες με γεωπίνακες, είναι: τα επίπεδα σχήματα, η μεταφορά επίπεδων σχημάτων προς άλλες κατευθύνσεις στο χώρο, η περιστροφή, η αντανάκλαση, η ομοιότητα, ο συνδυασμό επίπεδων σχημάτων, η μέτρηση, οι ορθές γωνίες, το σχέδιο, η ταξινόμηση, το εμβαδόν, η περίμετρος, κ.α.

Οι γεωπίνακες συνιστούν ένα εξαιρετικό χειραπτικό υλικό για τη διδασκαλία των επίπεδων σχημάτων εξαιτίας της ευκολίας με την οποία μπορούν να κατασκευάζονται και να αλλάζουν τα σχήματα πάνω σε αυτούς, αν και υπάρχουν κάποιοι περιορισμοί στη χρήση τους, οι οποίοι αφορούν κυρίως το μέγεθος, τη διευθέτηση και τον αριθμό των καρφιών του γεωπίνακα (Van de Walle, 2001/2005). Συνάμα, ένα από τα πλεονεκτήματα του συγκεκριμένου χειραπτικού υλικού είναι πως δεν χρειάζεται να υπάρχει κάποια προηγούμενη εξάσκηση των μαθητών γύρω από τη χρήση του, καθώς μπορεί πολύ εύκολα να ενταχθεί σε διάφορες δραστηριότητες γεωμετρικών εννοιών και αντίστοιχα οι μαθητές μπορούν εύκολα να το χρησιμοποιήσουν και να ανακαλύψουν από μόνοι τους τη χρησιμότητά του (Scandrett, 2008, σ. 29-32). Μάλιστα, ακόμα και μαθητές μικρότερης ηλικίας, οι οποίοι δεν έχουν αρκετές εμπειρίες και γνώσεις γύρω από τον σχεδιασμό επίπεδων σχημάτων, μπορούν εύκολα να κατασκευάσουν επίπεδα σχήματα και να ανακαλύψουν μόνοι τους τις ιδιότητες αυτών των σχημάτων (Caroll, 1992, όπ. αναφ. στο Scandrett, 2008, σ. 29-32).

Ωστόσο, κρίνεται σκόπιμο από την αρχή του μαθήματος ο εκπαιδευτικός να ξεκαθαρίσει στους μαθητές τον τρόπο με τον οποίο θα χρησιμοποιήσουν τα πολύχρωμα λαστιχάκια, ώστε να αποφευχθούν οποιεσδήποτε άσχετες με τις δραστηριότητες, χρήσεις τους (Scavo, 1995). Τέλος, προτείνεται στους εκπαιδευτικούς να παρέχουν στους μαθητές τους και χαρτιά – καμβάδες που αναπαριστούν τον γεωπίνακα που τους δόθηκε (Βλ. Σχήμα 2), ώστε να μπορούν να αντιγράφουν τα σχέδια που κατασκεύασαν στον γεωπίνακα και σε χαρτί με τη βοήθεια ενός μολυβιού και ενός χάρακα (Scavo, 1995· Van de Walle, 2001/2005). Τα αντίγραφα αυτά δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα να δημιουργήσουν πλήρη σύνολα σχεδίων (Van de Walle, 2001/2005).



Σχ. 2 Φύλλο με κουκίδες για γεωμετρικές διερευνήσεις

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί πως στην περίπτωση που οι μαθητές γνωρίζουν ήδη πώς να υπολογίζουν τα εμβαδά τετραγώνων, ορθογωνίων παραλληλογράμμων, τριγώνων και παραλληλογράμμων χρησιμοποιώντας τους μαθηματικούς τύπους, οι δραστηριότητες με γεωπίνακες θα τους βοηθήσουν να διερευνήσουν και να κατανοήσουν σε βάθος την έννοια του εμβαδού (Scavo, 1995). Έτσι οι γεωπίνακες θα λειτουργήσουν σαν εννοιολογικά εργαλεία, μιας και οι δραστηριότητες με γεωπίνακες θα οδηγήσουν τους μαθητές σε συσχετισμούς μεταξύ των εμβαδών διάφορων επίπεδων σχημάτων, όπως για παράδειγμα ότι το ορθογώνιο τρίγωνο είναι το μισό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου (Scavo, 1995). Τέτοιου είδους συσχετισμοί θα βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα την έννοια του εμβαδού.

Ολοκληρώνοντας, εκείνο που έχει ιδιαίτερη σημασία στην περίπτωση των δραστηριοτήτων με γεωπίνακες κατά τη διδασκαλία της έννοιας του εμβαδού επίπεδων σχημάτων είναι ότι υπάρχει μία μέθοδος γρήγορου υπολογισμού οποιουδήποτε πολυγώνου πάνω σε ένα γεωπίνακα, γνωστή ως *Θεώρημα του Pick* (Scavo, 1995). Χρησιμοποιώντας το *Θεώρημα του Pick* εκπαιδευτικός και μαθητές μπορούν να υπολογίσουν πολύ εύκολα το εμβαδόν ενός πολυγώνου μετρώντας απλώς καρφιά του γεωπίνακα. Εντούτοις, ένας τέτοιος μηχανικός τρόπος γρήγορου υπολογισμού του εμβαδού ενός σχήματος, συνίσταται να παρουσιάζεται στους μαθητές εφόσον έχουν κατανοήσει σε βάθος την έννοια του εμβαδού επίπεδων σχημάτων (Scavo, 1995).

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με το συγκεκριμένο θεώρημα εάν αθροίσουμε τα καρφιά που βρίσκονται περιμετρικά οποιουδήποτε πολυγώνου (b), έπειτα τα διαιρέσουμε με το 2, μετά προσθέσουμε τον αριθμό των καρφιών που το εσωτερικό του σχήματος (i) και αφαιρέσουμε 1, θα βρούμε το εμβαδόν του σχήματος (A) ή αλλιώς τον αριθμό των τετραγώνων ή των τριγώνων από τα οποία αποτελείται το σχήμα (Scavo, 1995). Ο τύπος που προκύπτει σύμφωνα με το *Θεώρημα του Pick* είναι ο εξής:

$$\boxed{A = \frac{b}{2} + i - 1}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ: Η ΟΜΑΔΟΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Με τον όρο «ομαδοσυνεργατική διδασκαλία ή ομαδική εργασία» (collaborative/cooperative learning) αναφερόμαστε στη μέθοδο διδασκαλίας, στα πλαίσια της οποίας η μάθηση επιτυγχάνεται εφόσον οι μαθητές συνεργάζονται, ανταλλάσσοντας ιδέες, επιλύοντας προβλήματα και επιτυγχάνοντας κοινούς στόχους (Lahann & Lambdin, 2014). Η ομαδοσυνεργατική μέθοδος διδασκαλίας, καθώς βασίζεται στις θεωρίες των κινήτρων μάθησης (Johnson & Johnson, 1983· Slavin, 1983, 1995, όπ. αναφ. στο Kaldi, Filippatou & Anthopoulou, 2013) και στις γνωστικές θεωρίες του Piaget και του Vygotsky, προωθεί την γνωστική και κοινωνική ανάπτυξη των μαθητών (Kaldi, Filippatou & Anthopoulou, 2013).

Σύμφωνα με τις Kaldi, Filippatou & Anthopoulou (2013), τα βασικότερα χαρακτηριστικά της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας είναι: η συνεργασία μεταξύ των μελών των διάφορων ομάδων ώστε να υλοποιήσουν κοινούς μαθησιακούς στόχους, η θετική αλληλεξάρτηση μεταξύ των μαθητών (Johnson & Johnson, 1992), η προωθητική αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών των διάφορων ομάδων (Veenman, Kenter & Post, 2000) και η ατομική και συλλογική υπευθυνότητα.

2.1 Βασικές αρχές για την εφαρμογή της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας

Τα κριτήρια που επηρεάζουν την εφαρμογή και την αποτελεσματικότητα της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας είναι (Lahann & Lambdin, 2014· Hertz-Lazarowitz & Fuks, 1987· Kroll, Masingila & Mau, 1992, όπ. αναφ. στο Leikin & Zaslavsky, 1999):

- η δομή και ο σχηματισμός των ομάδων εργασίας,
- οι αλληλεπιδράσεις των μαθητών σε κάθε ομάδα εργασίας,
- οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των διαφορετικών ομάδων εργασίας,
- η μορφή της ομαδικής εργασίας και ο ρόλος των μαθητών σε κάθε ομάδα εργασίας,
- ο ρόλος του δασκάλου κατά τη μαθησιακή διαδικασία,
- η αξιολόγηση της μαθησιακής διαδικασίας.

Η δομή και ο σχηματισμός των ομάδων εργασίας

Το κριτήριο της δομής και του σχηματισμού των ομάδων εργασίας σχετίζεται με τον αριθμό των μαθητών-μελών της κάθε ομάδας και το βαθμό ετερογένειας που υπάρχει σε κάθε ομάδα (Leikin & Zaslavsky, 1999). Πιο συγκεκριμένα, ο αριθμός των μαθητών σε κάθε ομάδα εργασίας εξαρτάται από τον τύπο της μαθηματικής δραστηριότητας, που λαμβάνει χώρα στη σχολική τάξη και μπορεί να ποικίλλει από δύο έως έξι μέλη σε κάθε ομάδα εργασίας (Lahann & Lambdin, 2014· Leikin & Zaslavsky, 1999). Ωστόσο, παρόλο που κάποιοι ερευνητές προτείνουν ότι η ομαδική εργασία κατά ζεύγη ή αλλιώς η εταιρική εργασία προωθεί καλύτερα την αυτόνομη μάθηση, ενώ άλλοι θεωρούν ότι οι ομάδες εργασίας των έξι μελών είναι το ιδανικό μέγεθος κάθε ομάδας εργασίας, συνιστάται συνήθως οι ομάδες εργασίας να απαρτίζονται από τέσσερα μέλη (Leikin & Zaslavsky, 1999). Επιπρόσθετα, όσον αφορά το βαθμό ετερογένειας κάθε ομάδας εργασίας, σύμφωνα με διάφορες έρευνες οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα όταν συνεργάζονται στα πλαίσια ετερογενών ομάδων εργασίας, που απαρτίζονται δηλαδή από μαθητές με διαφορετικά μαθησιακά επίπεδα (Davidson, 1990· Slavin, 1985, όπ. αναφ. στο Leikin & Zaslavsky, 1999). Αξιοσημείωτο είναι ότι σύμφωνα με έρευνες διαπιστώνεται ότι οι μαθητές με υψηλό μαθησιακό επίπεδο προτιμούν να συνεργάζονται και να αλληλεπιδρούν με μαθητές που βρίσκονται στο ίδιο μαθησιακό επίπεδο, ενώ οι μαθητές με χαμηλό μαθησιακό επίπεδο προτιμούν να συνεργάζονται με μαθητές υψηλότερου μαθησιακού επιπέδου, καθώς με αυτόν τον τρόπο μπορούν να λάβουν βοήθεια κατά τη μαθησιακή διαδικασία (Leikin & Zaslavsky, 1999).

Οι αλληλεπιδράσεις των μαθητών σε κάθε ομάδα εργασίας

Το είδος και ο βαθμός των αλληλεπιδράσεων των μαθητών-μελών κάθε ομάδας εργασίας εξαρτάται από τον τύπο της ομαδικής δραστηριότητας που τίθεται προς ολοκλήρωση, αλλά και από το είδος των μαθησιακών στόχων που έχουν τεθεί στα πλαίσια της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας. Εάν δηλαδή πρόκειται για ατομικούς στόχους που αφορούν κάθε μέλος της ομάδας ξεχωριστά ή για στόχους που αφορούν την ομάδα συλλογικά. Σε κάθε περίπτωση, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μελών κάθε ομάδας εργασίας εντείνονται όταν η ομαδική δραστηριότητα απαιτεί την εναλλαγή ρόλων μεταξύ των μελών και την ανταλλαγή ιδεών (Leikin & Zaslavsky, 1999).

Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των διαφορετικών ομάδων εργασίας

Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των διαφορετικών ομάδων εργασίας κατά τη ομαδοσυνεργατική μάθηση μπορεί να συμβούν σε μεγάλο βαθμό, αλλά και μπορεί να μην υπάρξουν (Sharan et al., 1980, όπ. αναφ στο Leikin & Zaslavsky, 1999). Δηλαδή υπάρχουν περιπτώσεις ομαδοσυνεργατικής μάθησης, όπου οι μαθητές θα παρουσιάσουν τα αποτελέσματα της εργασίας της ομάδας τους στις υπόλοιπες ομάδες, αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις, όπου οι μαθητές θα ολοκληρώσουν τη δραστηριότητά τους στα πλαίσια συνεργασίας εντός της ομάδας του, χωρίς να επικοινωνήσουν καθόλου με τις υπόλοιπες ομάδες. Ωστόσο, σύμφωνα με έρευνες όταν εφαρμόζονται ανταγωνιστικοί μέθοδοι ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των διάφορων ομάδων εργασίας διευκολύνονται (Leikin & Zaslavsky, 1999).

Η μορφή της ομαδικής εργασίας και ο ρόλος των μαθητών σε κάθε ομάδα εργασίας

Η ομαδική εργασία που ανατίθεται σε κάθε ομάδα εργασίας θα πρέπει να είναι κατάλληλα σχεδιασμένη από τον εκπαιδευτικό ώστε να προωθεί τη συνεργασία των μελών της ομάδας και να επιτρέπει σε όλους τους μαθητές, ανεξαρτήτως μαθησιακού επιπέδου, να συμβάλλουν κατά ένα μέρος στη διεκπεραίωσή της (Lahann & Lambdin, 2014· Leikin & Zaslavsky, 1999). Εξάλλου, στα πλαίσια εκτέλεσης μιας ομαδικής εργασίας, τα μέλη κάθε ομάδας εξαρτώνται το ένα από το άλλο και κατ' επέκταση η ολοκλήρωση της εργασίας εξαρτάται από ολόκληρη την ομάδα (Leikin & Zaslavsky, 1999). Όσον αφορά τον ρόλο των μαθητών, παρόλο που όλα τα μοντέλα ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας επισημαίνουν τη σημασία της συλλογικής υπευθυνότητας στην προσπάθεια επίτευξης ενός κοινού στόχου της ομάδας, σε κάποια μοντέλα ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας προτείνεται η ανάληψη συγκεκριμένων ρόλων από τα μέλη κάθε ομάδας (π.χ. γραμματέας) με σκοπό την αυτόνομη εργασία σε συγκεκριμένα μέρη της συλλογικής εργασίας (Lahann & Lambdin, 2014). Συνεπώς, οι μαθητές – μέλη κάθε ομάδας είναι υπεύθυνοι όχι μόνο για τη δική τους μάθηση, αλλά και για τη μάθηση συνολικά της ομάδας τους.

Ο ρόλος του δασκάλου κατά τη μαθησιακή διαδικασία

Ο εκπαιδευτικός αναλαμβάνει να προετοιμάσει το περιβάλλον και τις συνθήκες μάθησης, αλλά και να αναθέσει στους μαθητές εργασίες και ρόλους. Πιο συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να διαμορφώνει ένα περιβάλλον μάθησης, όπου κάθε μέλος –μαθητής της ομάδας θα μπορεί να έχει ίσες ευκαιρίες αλληλεπίδρασης με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας και θα μπορεί να εκφράσει τις δικές του ιδέες (Leikin & Zaslavsky, 1999). Παράλληλα κατά τη διάρκεια της ομαδικής εργασίας ο εκπαιδευτικός αναλαμβάνει τον ρόλο "διευκολυντή" της μαθησιακής διαδικασίας (Johnson & Johnson, 1983, όπ. αναφ. στο Kaldi, Filippatou & Anthopoulou, 2013· Leikin & Zaslavsky, 1999).

Η αξιολόγηση της μαθησιακής διαδικασίας

Η αξιολόγηση της μαθησιακής διαδικασίας από τον εκπαιδευτικό στα πλαίσια της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας μπορεί να επηρεάσει σε κάποιο βαθμό την επιτυχία της μαθησιακής διαδικασίας και τις επιδόσεις των μαθητών. Μάλιστα ο τύπος της αξιολόγησης της μαθησιακής διαδικασίας εξαρτάται άμεσα από τους μαθησιακούς στόχους που έχουν τεθεί για κάθε ομάδα εργασίας. Συνεπώς, εάν έχουν τεθεί μαθησιακοί στόχοι που απευθύνονται σε κάθε μαθητή ατομικά, τότε θα ακολουθήσει και ατομική αξιολόγηση των επιδόσεων του κάθε μαθητή. Από την άλλη πλευρά, εάν έχουν τεθεί συλλογικοί μαθησιακοί στόχοι για κάθε ομάδα εργασίας, τότε θα ακολουθήσει αντίστοιχα ομαδική αξιολόγηση, βάσει των επιδόσεων κάθε ομάδας (Leikin & Zaslavsky, 1999).

Τα κριτήρια που καταγράφθηκαν παραπάνω θα μπορούσαμε να πούμε ότι συμπίπτουν με τις συνθήκες που προτείνουν οι Artzt και Newman (1990, όπ. αναφ. στο Leikin & Zaslavsky, 1999) και ο Sutton (1992, όπ. αναφ. στο Leikin & Zaslavsky, 1999) ως αναγκαίες προϋποθέσεις για τη διαμόρφωση ενός κατάλληλου περιβάλλοντος ομαδοσυνεργατικής μάθησης στη σχολική τάξη. Μάλιστα βάσει αυτών των παραμέτρων, διακρίνουμε τα διάφορα μοντέλα ομαδοσυνεργατικής μάθησης (Lahann & Lambdin, 2014).

2.2 Μοντέλα εφαρμογής της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας

Σύμφωνα με τον Slavin (1985, σ. 5-15), υπάρχουν διάφορα μοντέλα ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, τα οποία διαφοροποιούνται αρκετά μεταξύ τους ως προς τις βασικές διδακτικές πρακτικές ομαδοσυνεργατικής μάθησης που προτείνουν. Εν συντομία κάποια από τα μοντέλα ομαδοσυνεργατικής μάθησης, τα οποία έχουν ερευνηθεί και χρησιμοποιηθεί ευρέως είναι τα εξής (Baudrit, 2005/2007· Slavin, 1985, σ. 5-15):

- *«Student Teams-Achievement Divisions (STAD)»* (Slavin, 1980, όπ. αναφ. στο Baudrit, 2005/2007)
- *«Teams-Games-Tournament (TGT)»* (Edwards & DeVries, 1972, 1974, όπ. αναφ. στο Baudrit, 2005/2007)

- *«Jigsaw»* (Aronson, Blaney, Stephan, Sikes & Snapp, 1978, όπ. αναφ. στο Baudrit, 2005/2007)
- *«Jigsaw II»* (Slavin, 1980, όπ. αναφ. στο Baudrit, 2005/2007)
- *«Learning Together»* (Johnson & Johnson, 1975, όπ. αναφ. στο Baudrit, 2005/2007)
- *«Group-Investigation»* (Sharan & Sharan, 1976· Sharan & Hertz-Lazarowitz, 1980, όπ. αναφ. στο Baudrit, 2005/2007)
- *«Team-Assisted Individualization (TAI)»* (Slavin, Leavey & Madden, 1986, όπ. αναφ. στο Baudrit, 2005/2007)

Όλα αυτά τα μοντέλα ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας και μάθησης προτείνουν διαφορετικές στρατηγικές εφαρμογής της ομαδοκεντρικής διδασκαλίας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την διάκριση των μοντέλων αυτών σε πιο ανταγωνιστικά και πιο συνεργατικά (Baudrit, 2005/2007). Για παράδειγμα το μοντέλο των Johnson & Johnson (1975) *«Learning Together»* ενσωματώνει ανταγωνιστικά και ατομικιστικά κίνητρα δράσης, αλλά και ομαδοσυνεργατικά κίνητρα, εφόσον περιλαμβάνει ομαδική εργασία και ομαδική αξιολόγηση (Slavin, 1985, σ. 177-209). Από την άλλη πλευρά, το μοντέλο *«Teams-Games-Tournament (TGT)»* των Edwards και DeVries (1972, 1974) συνδυάζει την ενδο-ομαδική συνεργασία με τον διαγωνισμό μεταξύ των διαφορετικών ομάδων και τον διαγωνισμό μεταξύ των διαφορετικών αντιπροσώπων-μελών κάθε ομάδας (Slavin, 1985, σ. 177-209).

Αντίστοιχα, το μοντέλο *«Student Teams-Achievement Divisions (STAD)»* του Slavin (1980) περιλαμβάνει την ενδο-ομαδική συνεργασία και αντικαθιστά τον διαγωνισμό μεταξύ των αντιπροσώπων των ομάδων που προτείνει το μοντέλο *TGT*, με ατομικά παιχνίδια γνώσεων (Slavin, 1985, σ. 177-209). Τέλος, το μοντέλο *«Jigsaw»* των Aronson, Blaney, Stephan, Sikes & Snapp (1978) συνδυάζει την ενδο-ομαδική συνεργασία με ένα ατομικιστικό σύστημα επιβράβευσης. Ενώ τόσο το μοντέλο *«Jigsaw»* όσο και το μοντέλο *«Group-Investigation»* των Sharan & Sharan (1976) προτείνουν την ατομική εργασία των μαθητών πάνω σε συγκεκριμένα μέρη της ομαδικής εργασίας και την ανάληψη ατομικής ευθύνης κάθε μαθητή-μέλους της ομάδας (Slavin, 1985, σ. 177-209).

Οι διαφορετικές πρακτικές εφαρμογής της ομαδοσυνεργατικής μάθησης, που προτείνουν αυτά τα μοντέλα ομαδοσυνεργατικής μάθησης, αποτελούν κατ' ουσίαν διαφορετικές προσπάθειες αντιμετώπισης προβλημάτων, που αναδύονται κατά την εφαρμογή της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας στην τάξη (Slavin, 1985, σ. 5-15, σ. 177-209). Για παράδειγμα ένα από τα προβλήματα που προκύπτουν κατά την εφαρμογή της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας είναι η ανάδειξη της συλλογικής υπευθυνότητας μιας ομάδας μαθητών, ως προς την ομαδική τους εργασία και αντίστοιχα η απαξίωση της ατομικής υπευθυνότητας, ως στόχος της μαθησιακής διαδικασίας (Slavin, 1983b, όπ. αναφ. στο Slavin, 1985, σ. 177-209).

Με άλλα λόγια, εάν στα πλαίσια της ομαδοσυνεργατικής μάθησης στη σχολική τάξη προωθείται η αίσθηση ότι η προσωπική συμμετοχή του κάθε μαθητή στην εργασία της ομάδας του δε μπορεί να αξιολογηθεί ξεχωριστά ή ότι δεν είναι απαραίτητη η εργασία όλων των μελών μιας ομάδας για την ολοκλήρωση της ομαδικής εργασίας, τότε είναι εύλογο ότι κάποια από τα μέλη της ομάδας θα εφησυχαστούν με τη σκέψη ότι άλλοι συμμαθητές τους θα αναλάβουν το δύσκολο έργο της ομαδικής εργασίας και θα θεωρήσουν ότι η προσωπική τους ενεργή συμμετοχή στη διαδικασία μάθησης δεν είναι και τόσο αναγκαία (Slavin, 1985, σ. 177-209). Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο, τα μοντέλα *STAD* και *TGT* προτείνουν η βαθμολογία κάθε ομάδας να προκύπτει από την συνεκτίμηση της ατομικής βαθμολογίας, που πετυχαίνει κάθε μέλος της ομάδας. Όπως αντίστοιχα τα μοντέλα *Jigsaw* και *Group-Investigation* προτείνουν την κατάτμηση της ομαδικής εργασίας σε υπο-εργασίες, που αναλαμβάνει να εκτελέσει κάθε μέλος της ομάδας ξεχωριστά. Με αυτές τις πρακτικές εφαρμογές τα παραπάνω μοντέλα ομαδοσυνεργατικής μάθησης ενισχύουν την σημασία της προσωπικής υπευθυνότητας και συμμετοχής κάθε μέλους της ομάδας (Slavin, 1985, σ. 177-209). Εξάλλου έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί σε σχέση με την ομαδοσυνεργατική μάθηση συμπεραίνουν ότι όταν οι ομαδοσυνεργατικές μέθοδοι μάθησης περιλαμβάνουν τη χρήση τέτοιων τεχνικών προώθησης της προσωπικής συμβολής κάθε μέλους στην ομαδική εργασία, τότε οι μαθητές σημειώνουν υψηλότερες μαθησιακές επιδόσεις (Slavin, 1983b, όπ. αναφ. στο Slavin, 1985, σ. 177-209).

Επιπρόσθετα με σκοπό την αντιμετώπιση της αδυναμίας του παραδοσιακού συστήματος επιβράβευσης να παρέχει σε όλους τους μαθητές ίσες ευκαιρίες για επιβράβευση, το μοντέλο STAD προτείνει την χρήση ενός συστήματος επιβράβευσης, μέσω του οποίου όλοι οι μαθητές έχουν ίσες ευκαιρίες επιβράβευσης εφόσον σημειώνουν σταδιακή βελτίωση στις επιδόσεις τους σε σύγκριση με παλιότερες επιδόσεις τους (Slavin, 1980, όπ. αναφ. στο Slavin, 1985, σ. 177-209).

Ένα τελευταίο πρόβλημα που προκύπτει στα πλαίσια του παραδοσιακού μοντέλου διδασκαλίας είναι η αδυναμία προσαρμογής του ρυθμού και περιεχομένου της διδασκαλίας στα διαφορετικά μαθησιακά επίπεδα όλων των μαθητών μιας σχολικής τάξης. Μάλιστα σύμφωνα με τους Carroll (1963) Bloom (1976) όταν ο εκπαιδευτικός ακολουθεί έναν ενιαίο ρυθμό διδασκαλίας για όλους τους μαθητές, αυτό έχει σαν αποτέλεσμα κάποιοι μαθητές να αποκλείονται από τη μαθησιακή διαδικασία και να μη «μαθαίνουν» εφόσον δε διαθέτουν τις απαραίτητες προϋπάρχουσες γνώσεις (Slavin, 1985, σ. 177-209). Κατ' επέκταση αυτή η ανομοιογένεια των διαφορετικών μαθησιακών επιπέδων των μαθητών μιας τάξης συνεχώς διευρύνεται και δημιουργεί αλλεπάλληλα μαθησιακά κενά στους πιο αδύναμους μαθητές. Σύμφωνα με έρευνες, αυτό το πρόβλημα της ανομοιογένειας των μαθησιακών επιπέδων των μαθητών μπορεί να επιλυθεί μέσω της εφαρμογής της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας (Slavin, 1985, σ. 177-209). Κάτι τέτοιο γίνεται εφικτό εφόσον κατά την ομαδοκεντρική διδασκαλία οι μαθητές μπορούν να συγκροτήσουν ανομοιογενείς ομάδες εργασίες, όπου οι μαθητές με χαμηλό μαθησιακό επίπεδο μπορούν να λαμβάνουν τη βοήθεια των συμμαθητών τους, που συμμετέχουν στην ίδια ομάδα και διαθέτουν υψηλότερο μαθησιακό επίπεδο. Αντίστοιχα και οι μαθητές υψηλότερου μαθησιακού επιπέδου μπορούν να ενισχύσουν τις μαθησιακές τους επιδόσεις αναλαμβάνοντας το ρόλο του εκπαιδευτή προς του συμμαθητές τους (Slavin, 1985, σ. 177-209).

2.3 Έρευνες για την αποτελεσματικότητα της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας και μάθησης στη μαθηματική εκπαίδευση

Μέσα από την επεξεργασία και τη μελέτη ενός πλήθους εκπαιδευτικών ερευνών που έχουν πραγματοποιηθεί από το 1988 έως το 2010 με σκοπό να εξετάσουν την επίδραση της ομαδοσυνεργατικής μάθησης στις μαθησιακές επιδόσεις και τις στάσεις των μαθητών απέναντι στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών, σε σύγκριση με την επίδραση του παραδοσιακού μοντέλου διδασκαλίας στους αντίστοιχους τομείς, οι Capar και Tarim (2015) διαπίστωσαν ότι η συνεργατική μέθοδος διδασκαλίας είναι πιο αποτελεσματική σε σύγκριση με την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας. Αντίστοιχα, όταν οι Johnson, Maruyama, Nelson & Skon (1981, όπ. αναφ. στο Davidson & Kroll, 1991) πραγματοποίησαν μια μετα-ανάλυση 122 εκπαιδευτικών ερευνών που αφορούν διάφορα μοντέλα της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας σε διάφορα γνωστικά αντικείμενα με σκοπό τη σύγκριση των επιδράσεων των ομαδοσυνεργατικών, ανταγωνιστικών και ατομικιστικών μορφών εργασίας των μαθητών στις μαθησιακές τους επιδόσεις, συμπέραναν ότι η συνεργατική μέθοδος είναι πιο αποτελεσματική ως προς την προώθηση των μαθησιακών επιδόσεων και τη συμμετοχή όλων των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία.

Εντούτοις, πάρα πολλές έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί με σκοπό να συγκρίνουν την αποτελεσματικότητα της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας σε σχέση με αυτή της παραδοσιακής μεθόδου στη μαθηματική εκπαίδευση δεν παρουσιάζουν στατιστικά σημαντική διαφορά ανάμεσα στις επιδράσεις των δύο μεθόδων διδασκαλίας ως προς μαθησιακές επιδόσεις των μαθητών, καταλήγοντας έτσι στο ότι η ομαδοσυνεργατική μέθοδος δεν επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό τις επιδόσεις των μαθητών (Capar & Tarim, 2015· Davidson & Kroll, 1991). Παρόλα αυτά, σε γενικές γραμμές οι εκπαιδευτικές έρευνες επισημαίνουν τη θετική συμβολή της ομαδοσυνεργατικής μάθησης στους ακαδημαϊκούς και κοινωνιο-γνωστικούς τομείς της μαθησιακής διαδικασίας (Artzt & Newman, 1990· Davidson, 1990a· Davidson, 1990b· Davidson & Kroll, 1991, Kroll, Masingila & Mau, 1992· Slavin, 1985· Weissglass, 1990, όπ. αναφ. στο Leikin & Zaslavsky, 1999).

Σύμφωνα με τις Lahann και Lambdin (2014), αρκετές έρευνες αποδεικνύουν ότι η μάθηση επιτυγχάνεται με πιο άμεσο τρόπο, όταν οι μαθητές εργάζονται ομαδοσυνεργατικά σε δραστηριότητες που είναι κατάλληλα δομημένες και προωθούν την ατομική και συλλογική ευθύνη των μελών της ομάδας. Παράλληλα όμως στα πλαίσια διάφορων ερευνών διαπιστώνεται ότι τα οφέλη της εφαρμογής της ομαδοκεντρικής διδασκαλίας δεν περιορίζονται μόνο σε γνωστικό επίπεδο, αλλά και σε κοινωνικό και συναισθηματικό επίπεδο. Πιο συγκεκριμένα αποτελέσματα ερευνών γύρω από την επίδραση της ομαδοκεντρικής διδασκαλίας δείχνουν ότι η εφαρμογή της ομαδοκεντρικής διδασκαλίας βελτιώνει τις ακαδημαϊκές επιδόσεις των μαθητών, τις διαπροσωπικές σχέσεις των μαθητών μέσα από τη συνεργασία τους κατά ομάδες, τις επικοινωνιακές και γενικά τις κοινωνικές τους δεξιότητες, προωθεί την αυτοεκτίμηση του μαθητή και την ψυχική του υγεία, ενισχύει την αλληλοκατανόηση και τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών με σκοπό την απόκτηση γνώσεων, δημιουργεί κίνητρα μάθησης και συμβάλλει στην απόκτηση θετικής συμπεριφοράς των μαθητών προς το σχολείο (Johnson & Johnson, 1989· Sharan, 1990· Slavin, 1983a· Slavin, 1990, όπ. αναφ. στο Davidson & Kroll, 1991). Σύμφωνα με τις Kaldi, Filippatou & Anthopoulou (2013), αντίστοιχα αποτελέσματα για την αποτελεσματικότητα της εφαρμογής της συνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας σε τομείς, όπως οι προαναφερθέντες, εντοπίζονται και στις έρευνες των Webb (1985), Galton & Williamson (1992), Veenman, Kenter & Post (2000), Gillies & Ashman (1996) και Gillies (2003, 2004, 2008).

Γενικότερα, σύμφωνα με τον Slavin (1985, σ. 5-15) η εφαρμογή της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας μπορεί να έχει θετικές επιδράσεις στις ακαδημαϊκές επιδόσεις των μαθητών, μιας και όταν οι μαθητές εργάζονται ομαδοσυνεργατικά ενθαρρύνουν και βοηθούν ο ένας τον άλλον να μάθει σε μεγαλύτερο βαθμό. Άξιο αναφοράς είναι το γεγονός ότι στις περιπτώσεις ερευνών, όπου η ομαδοσυνεργατική μέθοδος διδασκαλίας φαίνεται να επηρεάζει θετικά τις ακαδημαϊκές επιδόσεις των μαθητών, διαπιστώνεται ότι οι πιο αποτελεσματικές μέθοδοι ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας είναι αυτές κατά τις οποίες ο συνολικός βαθμός της ομάδας προκύπτει με βάση τις ατομικές επιδόσεις κάθε μέλους της ομάδας (Davidson, 1985, σ. 211-230· Slavin, 1985, σ. 5-15).

Συμπερασματικά, σύμφωνα με τον Slavin (1983b, όπ. αναφ. στο Slavin, 1985, σ. 5-15) ο συνδυασμός της ομαδικής επιβράβευσης και της ατομικής υπευθυνότητας και συνεισφοράς είναι απαραίτητος στην περίπτωση της εφαρμογής ομαδικών εργασιών στην τάξη, ούτως ώστε η ομαδοσυνεργατική μάθηση να συμβάλλει στην βελτίωση των ακαδημαϊκών επιδόσεων των μαθητών. Εξάλλου σύμφωνα με τους Leikin και Zaslavsky (1999), όταν οι μαθητές εργάζονται ομαδοσυνεργατικά πάνω σε μαθηματικές δραστηριότητες βελτιώνουν τις ικανότητές τους σχετικά με την επίλυση προβλημάτων, επιλύουν περισσότερο αφηρημένα μαθηματικά προβλήματα και κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες.

Συνάμα σύμφωνα με έρευνες η ομαδοσυνεργατική μέθοδος μάθησης φαίνεται πιο αποτελεσματική στους μαθηματικούς τομείς της γεωμετρίας και της άλγεβρας (Capar & Tarim, 2015). Όπως επίσης σύμφωνα με τον Weissglass (1977, όπ. αναφ. στο Davidson, 1985, σ. 211-230) η εφαρμογή της ομαδοσυνεργατικής μάθησης σε συνδυασμό με τη χρήση χειραπτικών υλικών κατά τη μαθηματική εκπαίδευση προωθεί σε ακόμα πιο σημαντικό βαθμό τις ακαδημαϊκές επιδόσεις των μαθητών.

Ο Slavin (1985, σ. 5-15) υποστηρίζει ότι όταν οι μαθητές συνεργάζονται για την ολοκλήρωση μιας κοινής εργασίας, στην οποία κάθε μαθητής θα συνεισφέρει ξεχωριστά ο καθένας στο δικό του βαθμό, τότε οι μαθητές μαθαίνουν να σέβονται ο ένας τον άλλον και κατ’ επέκταση η ομαδοσυνεργατική μέθοδος μάθησης επιδρά θετικά και στις ενδο-ομαδικές σχέσεις των μαθητών, κάτι που αποδεικνύεται και από πολλές έρευνες. Αντίστοιχα πολλοί ερευνητές βρίσκουν ότι η ομαδοσυνεργατική μέθοδος μάθησης βελτιώνει και τις σχέσεις μεταξύ των κυρίαρχων και των περιθωριοποιημένων μαθητών (Slavin, 1985, σ. 5-15). Ως εκ τούτου η αυτοεκτίμησή των μαθητών αυξάνεται σημαντικά, νιώθοντας ότι γίνονται περισσότερο αρεστοί από τους συμμαθητές τους και σημειώνοντας πρόοδο στις επιδόσεις τους, (Slavin, 1985, σ. 5-15).

Επιπλέον, χρειάζεται να επισημάνουμε ότι ένας από τους πιο σημαντικούς μαθησιακούς σκοπούς κατά τη μαθηματική εκπαίδευση είναι η προώθηση της επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών αλλά και μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητών γύρω από μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες (Bishop, 1985· NCTM, 1989, όπ. αναφ. στο Leikin & Zaslavsky, 1997). Έχει διαπιστωθεί λοιπόν ότι κάποια από τα μοντέλα ομαδοσυνεργατικής μάθησης μπορούν να προωθήσουν την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών και να διευκολύνουν τις δια-μαθητικές επικοινωνιακές αλληλεπιδράσεις που αφορούν τη μάθηση (Davidson, 1990· Good et al., 1992· Johnson & Johnson, 1985· Slavin, 1985· Webb, 1985, 1991, όπ. αναφ. στο Leikin & Zaslavsky, 1997).

Μπορεί να γίνεται φανερό ότι η εφαρμογή της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου μάθησης δεν αποφέρει πάντοτε θετικά μαθησιακά αποτελέσματα σε όλους τους μαθητές και ετούτο διότι είναι πολύ πιθανό οι πιο ικανοί μαθητές να οδηγηθούν σε αρχηγικές συμπεριφορές κατά τη διαδικασία μάθησης, λόγω της έντονα ενεργητικής συμμετοχής τους (Good et al., 1992, όπ. αναφ. στο Leikin & Zaslavsky, 1997). Ωστόσο, δεδομένου όμως ότι οι περισσότερες δια-μαθητικές αλληλεπιδράσεις σχετίζονται με την αναζήτηση και προσφορά βοήθειας από τον έναν μαθητή προς τον άλλο (Newman & Goldin, 1990· Webb, 1991, όπ. αναφ. στο Leikin & Zaslavsky, 1997), διαπιστώνεται ότι οι πιο αδύναμοι μαθητές μπορούν να λάβουν την απαραίτητη βοήθεια από τους συμμαθητές τους και να συμμετέχουν ενεργά στη διαδικασία μάθησης (Smith & Silver, 1989· Sweller & Cooper, 1985· Ward & Sweller, 1990· Zhu & Simon, 1987, όπ. αναφ. στο Leikin & Zaslavsky, 1997). Συνεπώς, μία κατάλληλα σχεδιασμένη ομαδοσυνεργατική μέθοδος μάθησης μπορεί να διαμορφώσει ένα αποτελεσματικό περιβάλλον μάθησης, όπου όλοι μαθητές θα μπορούν να συμμετέχουν ενεργά στην επίλυση προβλημάτων, χρησιμοποιώντας ως πρότυπα επίλυσης λυμένα παραδείγματα που αφορούν μαθηματικά προβλήματα και λαμβάνοντας βοήθεια από τους συμμαθητές τους.

Σύμφωνα με την έρευνα των Leikin και Zaslavsky (1997) η ομαδοσυνεργατική μέθοδος διδασκαλίας προωθεί μαθησιακές δραστηριότητες υψηλότερου επιπέδου, κατά τη μαθηματική εκπαίδευση. Πιο συγκεκριμένα, παρόλο που μη επικοινωνιακές συμπεριφορές του τύπου «αυτόνομη επίλυση ενός προβλήματος» και «αντιγραφή διδακτικού υλικού από το βιβλίο» εξακολουθούν να παρατηρούνται, διαπιστώνεται ότι όλο και περισσότερος χρόνος αφιερώνεται σε πιο ενεργητικές δραστηριότητες μάθησης, γεγονός που οδηγεί στην αύξηση των επικοινωνιακών αλληλεπιδράσεων μεταξύ μαθητών και μεταξύ δασκάλου και μαθητών. Οι επικοινωνιακές αλληλεπιδράσεις που φαίνεται να κυριαρχούν κατά τη μαθηματική εκπαίδευση σύμφωνα με την έρευνα των Leikin και Zaslavsky (1997) είναι «η παράθεση εξηγήσεων γύρω από ένα μαθηματικό πρόβλημα» και «η υποβολή ερωτημάτων – αναζήτηση βοήθειας». Έτσι λοιπόν, κατά την εφαρμογή της συνεργατικής μάθησης σε μικρές ομάδες εργασίας, δίνονται στους μαθητές ευκαιρίες να θέσουν ερωτήματα ή να δώσουν εξηγήσεις στους συμμαθητές του, με άλλα λόγια να επικοινωνήσουν μαθηματικά, κάτι που μπορεί να επηρεάσει τη μάθησή τους.

Μάλιστα σύμφωνα με έρευνες, όταν κατά τη μαθηματική εκπαίδευση οι μαθητές προσφέρουν βοήθεια στους συμμαθητές τους δίνοντάς τους κάποιες εξηγήσεις ή όταν αντίστοιχα οι μαθητές λαμβάνουν απαντήσεις σε απορίες που θέτουν, τότε διαπιστώνεται ότι οι ακαδημαϊκές επιδόσεις μόνο των μαθητών με χαμηλό μαθησιακό επίπεδο επηρεάζονται θετικά (Peterson & Janicki, 1979· Peterson, Janicki & Swing, 1981· Peterson, 1982, όπ. αναφ. στο Webb, 1985, σ. 147-172). Από την άλλη πλευρά, όταν οι μαθητές δίνουν ή λαμβάνουν απλώς πληροφορίες χωρίς επεξηγήσεις (π.χ. όταν δίνουν απλώς απαντήσεις σε ερωτήματα ή όταν αναφέρουν απλώς λάθη) και όταν δεν λαμβάνουν καμία βοήθεια, τότε οι μαθησιακές τους επιδόσεις επηρεάζονται αρνητικά (Webb, 1985, σ. 147-172).

Σύμφωνα με τον Webb (1985, σ. 147-172) έρευνες αποδεικνύουν ότι οι μαθητές υψηλού γνωστικού επιπέδου τείνουν να δίνουν περισσότερες επεξηγηματικές πληροφορίες στους συμμαθητές τους σε σύγκριση με τους μαθητές μεσαίου ή χαμηλού γνωστικού επιπέδου. Αντίστοιχα έρευνες δείχνουν ότι οι πιο εξωστρεφείς μαθητές κατορθώνουν πιο συχνά να λαμβάνουν βοήθεια ακριβώς τη στιγμή που τη χρειάζονται σε σύγκριση με τους εσωστρεφείς μαθητές (Webb, 1985, σ. 147-172).

Πολύ σημαντικό όσον αφορά τη σύνθεση των ομάδων εργασίας είναι το γεγονός πως σύμφωνα με έρευνες η αλληλεπίδραση και η επικοινωνία μεταξύ των ομάδων εργασίας σε μία τάξη προωθείται καλύτερα όταν διαμορφώνονται ανομοιογενείς ομάδες εργασίας που αποτελούνται από μαθητές υψηλού και μέτριου γνωστικού επιπέδου, ανομοιογενείς ομάδες εργασίας που αποτελούνται από μαθητές χαμηλού και μέτριου γνωστικού επίπεδου και ομοιογενείς ομάδες μαθητών μέτριου γνωστικού επιπέδου (Webb, 1985, σ. 147-172).

Ο εκπαιδευτικός λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών μπορεί να συνθέσει ομάδες εργασίας, στα πλαίσια των οποίων οι μαθητές θα μπορούν να επικοινωνούν και να αλληλεπιδρούν με τρόπο που να προωθεί τις ακαδημαϊκές τους επιδόσεις.

2.4 Το ομαδοκεντρικό μοντέλο «Team-Assisted Individualization (TAI)» στη διδασκαλία των μαθηματικών

Το ομαδοκεντρικό μοντέλο μάθησης «*Team-Assisted Individualization* ή TAI», γνωστό ως το μοντέλο «*Εξατομικευμένης μάθησης με συλλογική αντίληψη*» παρουσιάσθηκε από τους Slavin, Leavey και Madden (1984, 1986) και συνδυάζει την ομαδοσυνεργατική μάθηση με την εξατομικευμένη διδασκαλία στα πλαίσια της διδασκαλίας των μαθηματικών (Baudrit, 2005/2007· Slavin, Madden & Leavey, 1984· Slavin, 1985, σ. 177-209). Σύμφωνα με την έρευνα του Slavin (1980, όπ. αναφ. στο Tarim & Akdeniz, 2008), οι ομαδοσυνεργατικές μέθοδοι TAI και STAD είναι πιο αποτελεσματικές όσον φορά τις μαθησιακές επιδόσεις των μαθητών σε σύγκριση με άλλες μεθόδους διδασκαλίας. Ενώ οι Tarim και Akdeniz (2008), συμπεραίνουν βάση της έρευνάς τους ότι η εφαρμογή της μεθόδου TAI κατά τη διδασκαλία βελτιώνει στατιστικά σε πιο σημαντικό βαθμό τις ακαδημαϊκές επιδόσεις των μαθητών, σε σύγκριση με τα αποτελέσματα της μεθόδου STAD.

Όταν οι μαθητές «μαθαίνουν» στα πλαίσια του ομαδοκεντρικού μοντέλου TAI έχουν τη δυνατότητα να προσεγγίσουν τις μαθηματικές ιδέες και έννοιες, όπως αυτές προτείνονται από τα αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, με βάση το μαθησιακό τους επίπεδο στα μαθηματικά αλλά και με βάση το δικό τους ρυθμό μάθησης (Slavin, 1985, σ. 177-209). Συνεπώς, μέσω του συγκεκριμένου μοντέλου συνεργατικής μάθησης, οι μαθητές κινητοποιούνται ώστε να συμμετέχουν πιο ενεργά στη μαθηματική εκπαίδευση και να μαθαίνουν πιο γρήγορα σε σύγκριση με τη παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας μαθηματικών. Εφόσον λοιπόν η μαθηματική εκπαίδευση προσαρμόζεται στο ρυθμό μάθησης κάθε ομάδας και στις ικανότητες κάθε μαθητή, μέσω αυτής της μεθόδου οι μαθητές χαμηλού γνωστικού επιπέδου έχουν τη δυνατότητα καλύψουν τα γνωστικά κενά τους και μπορούν να αποκτήσουν προϋπάρχουσες γνώσεις, χωρίς να παραμεριστούν από το γενικό ρυθμό μάθησης των υπόλοιπων μαθητών στην τάξη. Αλλά και οι μαθητές υψηλού γνωστικού επιπέδου μπορούν να επεξεργαστούν μαθηματικές δραστηριότητες με βάση το δικό τους ρυθμό μάθησης (Slavin, 1985, σ. 177-209).

Στα πλαίσια της εφαρμογής του ομαδοκεντρικού μοντέλου TAI στη μαθηματική εκπαίδευση, ο εκπαιδευτικός συνθέτει ανομοιογενείς ομάδες εργασίας των τεσσάρων ή πέντε μελών. Έτσι λοιπόν κάθε ομάδα εργασίας αποτελείται από μαθητές υψηλού, μέτριου και χαμηλού γνωστικού επιπέδου, διαφορετικού φύλου και διαφορετικής πολιτισμικής προέλευσης (Slavin, 1985, σ. 177-209).

Η μέθοδος TAI εφαρμόζεται σε τέσσερις διαδοχικές φάσεις κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Συνήθως καθεμία από αυτές τις φάσεις αντιστοιχεί σε μία ωριαία διδασκαλία. Αρχικά οι μαθητές σχηματίζουν μικρές υπο-ομάδες των δύο ή των τριών ατόμων εντός της ομάδας τους. Σε πρώτη φάση, ο εκπαιδευτικός πραγματοποιεί διδασκαλία στην ολομέλεια της τάξης γύρω από τις μαθηματικές έννοιες, που πρόκειται να επεξεργαστούν οι μαθητές, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών (Tarim & Akdeniz, 2008). Αυτή η φάση της διδασκαλίας μπορεί να αντικατασταθεί και από μία φάση κατά την οποία οι μαθητές διαβάζουν και προσπαθούν να κατανοήσουν ένα καθοδηγητικό φυλλάδιο που περιλαμβάνει λυμένες δραστηριότητες – έτοιμα παραδείγματα μαθηματικών προβλημάτων γύρω από μαθηματικές έννοιες με τις οποίες πρόκειται να ασχοληθούν κι οι ίδιοι στη συνέχεια (Slavin, 1985, σ. 177-209). Σε αυτή την φάση, εάν οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν κάτι, μπορούν να ζητήσουν βοήθεια από τους συμμαθητές τους ή τον εκπαιδευτικό.

Κατά τη δεύτερη φάση, δίνονται στους μαθητές φύλλα δραστηριοτήτων, τα οποία αποτελούνται από δύο ή τρία μέρη, εκ των οποίων κάθε μέρος περιλαμβάνει τέσσερα ερωτήματα-δραστηριότητες, που σχετίζονται με τις μαθηματικές έννοιες που διδάχθηκαν οι μαθητές κατά την πρώτη φάση. Κάθε μαθητής προσπαθεί να απαντήσει ατομικά στις δραστηριότητες του φύλλου αυτού, ξεκινώντας πρώτα με τις τέσσερις πρώτες δραστηριότητες του πρώτου μέρους του φύλλου εργασίας. Εφόσον λοιπόν κάθε μαθητής ολοκληρώσει το πρώτο μέρος δραστηριοτήτων του φύλλου αυτού, ανταλλάσσει το φύλλο του με το φύλλο εργασίας του συμμαθητή του, με τον οποίο έχουν σχηματίσει μία υπο-ομάδα μέσα στην ομάδα τους. Κάθε μαθητής λοιπόν ελέγχει και διορθώνει τις απαντήσεις του συμμαθητή του με βάση τις οδηγίες που δίνονται από τον εκπαιδευτικό σχετικά με τον τρόπο επίλυσης κάθε δραστηριότητας ή με ένα φυλλάδιο που μοιράζει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές και περιλαμβάνει όλες τις δραστηριότητες του φύλλου αυτού απαντημένες (Slavin, 1985, σ. 177-209· Tarim & Akdeniz, 2008). Σε αυτό το σημείο, εάν κάποιος μαθητής έχει απαντήσει σωστά σε όλες τις δραστηριότητες του πρώτου μέρους του φύλλου αυτού, τότε μπορεί να προχωρήσει στην επόμενη φάση δραστηριοτήτων. Εάν όμως διαπιστωθεί από το συμμαθητή του πως έχει απαντήσει λανθασμένα σε κάποια δραστηριότητα, τότε ο μαθητής πρέπει να προσπαθήσει να απαντήσει στις υπόλοιπες τέσσερις δραστηριότητες, που ακολουθούν στο δεύτερο μέρος του ίδιου φύλλου εργασίας. Σε αυτή τη φάση, αναμένεται όλοι οι μαθητές να κατορθώσουν να απαντήσουν σωστά τουλάχιστον σε ένα από τα μέρη αυτού του φύλλου εργασίας, ώστε να μπορέσουν να προχωρήσουν στην επόμενη φάση. Όταν μάλιστα κάποιος μαθητής συναντήσει δυσκολίες σε αυτή τη φάση, παρακινείται από τους συμμαθητές του εντός της ομάδας του ώστε να λάβει βοήθεια από αυτούς ειδάλλως μπορεί να απευθυνθεί στον εκπαιδευτικό (Slavin, 1985, σ. 177-209· Tarim & Akdeniz, 2008).

Στη τρίτη φάση, ο εκπαιδευτικός μοιράζει στους μαθητές τις καρτέλες ελέγχου δεξιοτήτων, που περιλαμβάνουν δύο τεστ παρόμοιου περιεχομένου και δυσκολίας. Κάθε τεστ περιλαμβάνει δέκα ερωτήματα-δραστηριότητες που σχετίζονται με τις μαθηματικές έννοιες που οι μαθητές έχουν διδαχθεί και επεξεργαστεί και στα προηγούμενα φύλλα εργασίας. Κάθε μαθητής εργάζεται ατομικά στην πρώτη καρτέλα ελέγχου και αφού ολοκληρώσει το πρώτο τεστ των 10 ερωτημάτων, δίνει την καρτέλα του στο συμμαθητή του, με το οποίο έχουν σχηματίσει μία υπο-ομάδα εντός της ομάδας του με σκοπό να αξιολογήσει τις επιδόσεις του στο τεστ (Slavin, 1985, σ. 177-209· Tarim & Akdeniz, 2008). Εάν ο μαθητής έχει απαντήσει σωστά τουλάχιστον στα 8 ερωτήματα του τεστ και έχει σημειώσει ποσοστό επιτυχίας από 80% και άνω, τότε ο συμμαθητής του, που τον αξιολόγησε και υπολόγισε το βαθμό επιτυχίας του, δείχνει την καρτέλα και στην υπόλοιπη ομάδα και στη συνέχεια η ομάδα τον κρίνει ικανό ώστε να συνεχίσει στην τελική φάση αξιολόγησης. Αντίθετα στην περίπτωση που ο μαθητής έχει απαντήσει σε λιγότερα από 8 ερωτήματα σωστά, τότε καλείται ο εκπαιδευτικός ώστε να του εξηγήσει πιθανές απορίες που μπορεί να έχει και να τον βοηθήσει. Κατόπιν ο μαθητής παίρνει τη δεύτερη καρτέλα ελέγχου και προσπαθεί να απαντήσει σε άλλα δέκα ερωτήματα του δεύτερου τεστ (Slavin, 1985, σ. 177-209· Tarim & Akdeniz, 2008).

Κατά τη τελευταία φάση, σε κάθε ομάδα εργασίας ορίζεται ένα μαθητής-ελεγκτής, ο οποίος πρόκειται να αξιολογήσει τα τεστ τελικής αξιολόγησης. Κάθε μαθητής συμπληρώνει ατομικά το τεστ τελικής αξιολόγησης. Όταν ολοκληρώσει το τεστ του, τότε το δίνει σε έναν μαθητή-ελεγκτή, που ανήκει σε άλλη ομάδα, με σκοπό να βαθμολογήσει το τεστ του (Slavin, 1985, σ. 177-209· Tarim & Akdeniz, 2008).

Αφού ολοκληρωθούν και οι τέσσερις αυτές φάσεις του ομαδοκεντρικού μοντέλου TAI, ο εκπαιδευτικός βαθμολογεί κάθε μαθητή ξεχωριστά, ανάλογα με την πρόοδο που σημείωσε και στη συνέχεια αξιολογεί την κάθε ομάδα εργασίας. Η συλλογική βαθμολογία κάθε ομάδας προκύπτει υπολογίζοντας το μέσο όρο των ατομικών βαθμών του κάθε μέλους της ομάδας. Στο τέλος, κάθε ομάδα παίρνει την τελική ανταμοιβή, ανάλογα με το συνολικό της βαθμό. Μάλιστα σύμφωνα με τον Slavin (1985, σ. 177-209) οι ομάδες εργασίας, με βάση την τελική τους βαθμολογία, μπορούν να κερδίσουν τίτλους διάκρισης, όπως «άριστη ομάδα», «απίθανη ομάδα» και «καλή ομάδα».

Είναι προφανές λοιπόν πως η μέθοδος TAI βασίζεται στην συνεχή εναλλαγή ατομικής και συλλογικής μάθησης και εξασφαλίζει την εξατομίκευση της διδασκαλίας, καθώς λαμβάνει υπόψη την ανομοιογένεια των γνωστικών επιπέδων των μαθητών στο εσωτερικό μιας τάξης. Στα πλαίσια αυτής της μεθόδου είναι εφικτή και η διαθεσιμότητα και η ευελιξία του εκπαιδευτικού κατά τη διδασκαλία, καθώς οι μαθητές ενεργούν αυτόνομα κατά τη διαδικασία μάθησης και ο δάσκαλος δε χρειάζεται να ασχολείται με όλους τους μαθητές ταυτόχρονα, αλλά μπορεί να απευθύνεται σε μικρές ομάδες μαθητών με παρόμοιο γνωστικό επίπεδο, οι οποίοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατά τη μάθηση (Slavin, 1985, σ. 177-209). Έτσι η διδασκαλία προσαρμόζεται στις δυσκολίες των μαθητών και οι μαθητές έχουν ίσες ευκαιρίες για επιτυχία και πρόοδο (Baudrit, 2005/2007).

Σύμφωνα με έρευνες, οι μαθητές που μαθαίνουν μαθηματικά, στα πλαίσια της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου TAI σημειώνουν υψηλότερες μαθησιακές επιδόσεις σε σύγκριση με τους μαθητές που διδάσκονται μαθηματικά με την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας (Bryant, 1981· Johnson et al., 2000, όπ. αναφ. στο Tarim & Akdeniz, 2008· Slavin, Madden & Leavey, 1984). Μάλιστα σύμφωνα με τους Madden και Slavin (1983), τα χαρακτηριστικά της εξατομικευμένης διδασκαλίας που διαθέτει η ομαδοσυνεργατική μέθοδος TAI επηρεάζουν θετικά και τις ακαδημαϊκές επιδόσεις των μαθητών που αντιμετωπίζουν μαθησιακές δυσκολίες, καθώς η διδασκαλία μπορεί μέσω αυτής της μεθόδου να προσαρμοστεί στις μαθησιακές ανάγκες αυτών των μαθητών (Slavin, Madden & Leavey, 1984· Slavin, 1985, σ. 177-209).

Ταυτόχρονα, η συγκεκριμένη μέθοδος συνεργατικής μάθησης έχει θετικές επιδράσεις και στις κοινωνικές σχέσεις και τις συμπεριφορές μεταξύ των μαθητών και ιδιαίτερα μεταξύ των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες και των μαθητών χωρίς μαθησιακές δυσκολίες (Ballard, Corman, Gottlieb & Kaufman, 1977· Cooper, Johnson, Johnson & Wilderson, 1980· Johnson & Johnson, 1982· Madden & Slavin, 1983, όπ. αναφ. στο Slavin, 1985, σ. 177-209). Συνεπώς η ομαδοσυνεργατική μέθοδος μάθησης TAI ενδείκνυται για σχολικές τάξεις που χαρακτηρίζονται από ανομοιογένεια όσον αφορά τα μαθησιακά επίπεδα των μαθητών (Slavin, 1985, σ. 177-209). Επιπρόσθετα σύμφωνα με έρευνες, η μέθοδος TAI βελτιώνει τις διαπροσωπικές σχέσεις μεταξύ των μαθητών διαφορετικής πολιτισμικής προέλευσης και διαφορετικού φύλου (Oishi, 1983, όπ. αναφ. στο Slavin, 1985, σ. 177-209). Συμπερασματικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η εφαρμογή της μεθόδου συνεργατικής μάθησης TAI κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών συμβάλλει τόσο στη γνωστική όσο και στη συναισθηματική ανάπτυξη των μαθητών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ: ΟΙ ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ ΙΔΕΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ/ΤΡΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΑΙ ΟΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ

Σύμφωνα με την κονστρουκτιβιστική θεωρία μάθησης στα μαθηματικά, οι εναλλακτικές ιδέες των μαθητών γύρω από μια μαθηματική έννοια μπορούν να αναδείξουν τις προϋπάρχουσες νοητικές αναπαραστάσεις τους γύρω από αυτή την έννοια και να οδηγήσουν τον εκπαιδευτικό στη διαμόρφωση της κατάλληλης μεθόδου διδασκαλίας με σκοπό την αναδιαμόρφωση των ιδεών αυτών (Smith et al., 1993, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016). Από τη σκοπιά της επικοδομητικής θεωρίας της μάθησης, η ανίχνευση αυτών των λανθασμένων ιδεών των μαθητών παίζει σημαντικό ρόλο στην προώθηση της μαθηματικής κατανόησης, μιας και ο μαθητής μπαίνει στη διαδικασία να φέρνει στην επιφάνεια τις προϋπάρχουσες διαισθητικές ιδέες του, να τις ανακατασκευάζει και τελικώς να διαμορφώνει πιο στέρεες αντιλήψεις. Έτσι λοιπόν όσον αφορά τη θεματική ενότητα της μέτρησης του «Εμβαδού» που εξετάζουμε στα πλαίσια της έρευνάς μας, οι προϋπάρχουσες ιδέες των μαθητών γύρω από την έννοια της μέτρησης του μήκους είναι εξαιρετικά χρήσιμες για τον εκπαιδευτικό κατά τη διδασκαλία της μαθηματικής έννοιας της μέτρησης του εμβαδού, αλλά και της περιμέτρου και του όγκου (Bragg & Outhred, 2000, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016).

Διάφορες έρευνες που έχουν γίνει γύρω από τη διδασκαλία και τη μάθηση της μαθηματικής έννοιας της «μέτρησης» έχουν δείξει ότι οι μαθητές οδηγούνται σε μια επιφανειακή κατανόηση της έννοιας της μέτρησης όχι μόνο του εμβαδού αλλά και της μέτρησης του μήκους καθώς και της μέτρησης του όγκου (Bragg & Outhred, 2004· Chappell & Thompson, 1999· Curry, Mitchelmore & Outhred, 2006· Grant & Kline, 2003· Kamii & Clark, 1997· Martin & Strutchens, 2000, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016). Μελετώντας λοιπόν αυτές τις έρευνες διαπιστώνουμε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες κατά τη διδασκαλία της έννοιας της μέτρησης του μήκους, του εμβαδού και του όγκου.

Σύμφωνα με την πρόσφατη έρευνα των Sisman και Aksu (2016), οι παρανοήσεις και οι λανθασμένες ιδέες των μαθητών σχετικά με την έννοια της μέτρησης του «Εμβαδού» οφείλονται στην ελλιπή κατανόηση της μαθηματικής έννοιας της μέτρησης του «Εμβαδού» και των μαθηματικών τύπων για τον υπολογισμό του εμβαδού. Πιο συγκεκριμένα το πρόβλημα στην κατανόηση της μαθηματικής έννοιας του εμβαδού εντοπίζεται σε δύο επίπεδα σύμφωνα με τους Sisman και Aksu (2016). Πρώτον, οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν «πώς μετράμε το εμβαδόν ενός σχήματος» και δεύτερον, δυσκολεύονται να κατανοήσουν «τι σημαίνει μέτρηση του εμβαδού ενός σχήματος». Πρόκειται στην ουσία για τα δύο είδη γνώσης, την εννοιολογική γνώση και τη διαδικαστική γνώση, που διαχωρίζει ο Hiebert στο βιβλίο του (1986, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016). Σύμφωνα με τους Sisman και Aksu (2016), οι μαθητές προσεγγίζουν επιφανειακά την έννοια της μέτρησης του «Εμβαδού», με αποτέλεσμα την αδυναμία της ουσιαστικής κατάκτησης αυτής της διττής γνώσης. Μάλιστα όπως προκύπτει από έρευνες αυτό οφείλεται στο γεγονός πως κατά τη διδασκαλία της έννοιας της μέτρησης δίνεται από τους εκπαιδευτικούς μεγαλύτερη έμφαση στο «πώς μετράμε;» παρά στο «τι μετράμε;» (Grant & Kline, 2003· Kamii & Clark, 1997, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016).

Επιπρόσθετα ο Battista (1982) υποστηρίζει ότι οι παρανοήσεις και οι ασαφείς ιδέες των μαθητών γύρω από τη μαθηματική έννοια του «Εμβαδού» απορρέουν από το γεγονός πως η μέτρηση του εμβαδού καταλήγει μία περίπλοκη διαδικασία στα πλαίσια της διδασκαλίας. Πιο συγκεκριμένα, παρόλο που οι μαθητές σε πρώτο επίπεδο διδάσκονται ότι το εμβαδόν ενός σχήματος ισούται με το πλήθος των μονάδων μέτρησης, που επιλέγουμε αυθαίρετα, για να επικαλύψουμε την επιφάνεια του σχήματός μας, τελικώς καταλήγουν να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός σχήματος υπολογίζοντας τα μήκη των πλευρών του και εφαρμόζοντας αλγοριθμικούς μαθηματικούς τύπους (Battista, 1982). Κάτι τέτοιο, σύμφωνα με τον Battista (1982) προκαλεί στους μαθητές μία σύγχυση ιδεών γύρω από την έννοια του «Εμβαδού», αφού εάν ζητήσεις από τους μαθητές να σου προσδιορίσουν την έννοια του εμβαδού, τις περισσότερες φορές θα σου απαντήσουν ότι το εμβαδόν ενός σχήματος είναι ο πολλαπλασιασμός του μήκους επί το πλάτος του σχήματος ή ακόμα χειρότερα θα περιπλέξουν την έννοια του «Εμβαδού» με την έννοια της «Περιμέτρου» (Battista, 1982).

Βέβαια κάνοντας μία ενδοσκόπηση στην έννοια της μονάδας μέτρησης του εμβαδού παρατηρούμε ότι οι τυπικές μονάδες μέτρησης του «Εμβαδού» είναι τετραγωνικές επιφάνειες με συγκεκριμένα μήκη πλευρών. Κάτι τέτοιο αποδεικνύει πως η μονάδα μέτρησης του εμβαδού απορρέει από τη μονάδα μέτρησης του μήκους (Battista, 1982). Ωστόσο σύμφωνα με τους Sisman και Aksu (2016) ελάχιστοι μαθητές είναι σε θέση να εξηγήσουν τους λόγους για τους οποίους το «Μήκος» σχετίζεται με το «Εμβαδόν».

Ενώ ταυτόχρονα προκύπτει ως συμπέρασμα ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές γύρω από την έννοια της μέτρησης του εμβαδού οφείλονται πολλές φορές σε λανθασμένες ιδέες που έχουν σχηματίσει οι μαθητές γύρω από την έννοια της μέτρησης του «Μήκους», που ως θεματική ενότητα διδασκαλίας προηγείται της μέτρησης του «Εμβαδού» και σχετίζεται άμεσα με αυτή (Sisman & Aksu, 2016). Γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο ο Battista (1982) προτείνει αρχικά τη διδασκαλία της μέτρησης του εμβαδού επίπεδων σχημάτων με τη χρήση μη τυπικών μονάδων μέτρησης, με σκοπό την απόκρυψη της συσχέτισης της μονάδας μέτρησης του εμβαδού με τη μονάδα μέτρησης του μήκους. Έτσι κατά το πρώτο επίπεδο διδασκαλίας, οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να κατανοήσουν ίσως καλύτερα την έννοια του «Εμβαδού».

Είναι προφανές από τα παραπάνω ότι τις περισσότερες φορές οι δυσκολίες και οι λανθασμένες ιδέες που εμφανίζουν οι μαθητές και οι μαθήτριες γύρω από την έννοια της μέτρησης του «Εμβαδού» οφείλονται στη μέθοδο διδασκαλίας του εκπαιδευτικού. Ωστόσο σύμφωνα με έρευνες ένας ακόμη παράγοντας που επηρεάζει τους μαθητές στη διαμόρφωση λανθασμένων ιδεών είναι και οι μαθηματικές γνώσεις που διαθέτει ο εκάστοτε εκπαιδευτικός γύρω από τη θεματική ενότητα του εμβαδού (Baturo & Nason, 1996· Berenson et al., 1997· Tierney et al., 1990, όπ. αναφ. στο Murphy, 2012). Όπως υποστηρίζουν και οι Baturo και Nason (1996) και ο Murphy (2012) όταν ο εκπαιδευτικός δεν διαθέτει ουσιαστικές μαθηματικές γνώσεις και μαθηματική σκέψη και δεν είναι σε θέση να αντιλαμβάνεται τις μαθηματικές έννοιες που κρύβονται πίσω από τα μαθηματικά σύμβολα και τις αλγοριθμικές αναπαραστάσεις, αυτό επηρεάζει άμεσα και τη μάθηση των μαθητών του κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Πιο συγκεκριμένα, έρευνες που έχουν διεξαχθεί με σκοπό να εξετάσουν τις γνώσεις που διαθέτουν οι εκπαιδευτικοί σχετικά με την έννοια του «Εμβαδού» δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί που εμφανίζουν ελλιπή κατανόηση της έννοιας της μέτρησης του «Εμβαδού», τείνουν να στηρίζουν τη διδασκαλία τους αποκλειστικά στη χρήση μαθηματικών τύπων για τον υπολογισμό του εμβαδού επίπεδων σχημάτων, ενώ ταυτόχρονα δεν αντιλαμβάνονται πώς η μέτρηση του εμβαδού σχετίζεται με τη μέτρηση του μήκους (Baturo και Nason, 1996· Berenson et al., 1997· Zacharos, 2006· Pesek & Kirshner, 2000· Tierney et al., 1990, όπ. αναφ. στο Murphy, 2012). Εξαιτίας αυτής της προσέγγισης των εκπαιδευτικών, που οφείλεται σε μία δική τους γνωστική έλλειψη, οι μαθητές εστιάζουν στη μηχανική χρήση των μαθηματικών τύπων, που διδάσκονται, για τον υπολογισμό του εμβαδού, χωρίς να κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες και ιδιότητες που κρύβονται από πίσω από τις νόρμες αυτές (Dickson et al., 1984, όπ. αναφ. στο Murphy, 2012). Συνεπώς οι μαθητές γίνονται παθητικοί αποδέκτες των όσων διδάσκονται και δε αντιλαμβάνονται τις μαθηματικές διαδικασίες που εκτελούν, γεγονός που τους οδηγεί σε παρανοήσεις γύρω από τη μαθηματική έννοια του εμβαδού (Murphy, 2012).

3.1 Έρευνες για την ανάδειξη των εναλλακτικών ιδεών των μαθητών/τριών γύρω από τη μαθηματική έννοια του «Εμβαδού»

Εστιάζοντας περισσότερο στις δυσκολίες των μαθητών, χρειάζεται να υπογραμμίσουμε ότι έρευνες έχουν αναδείξει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα να αντιληφθούν τη συσχέτιση της μονάδας μέτρησης του μήκους με τη μονάδα μέτρησης του εμβαδού, τη σταθερότητα της τιμής του εμβαδού, το εμβαδόν ενός δυσδιάστατου σχήματος, τη διαφορά μεταξύ των εννοιών της «Περιμέτρου» και του «Εμβαδού» όπως επίσης και τους μαθηματικούς τύπους, που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του εμβαδού (Battista, 2003· Chappell & Thompson, 1999· Furinghetti & Paola, 1999· Nunes et al, 1993, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016).

Οι Sisman και Aksu (2016) θέλοντας να εντοπίσουν τις εναλλακτικές ιδέες και τις δυσκολίες που εμφανίζουν οι μαθητές γύρω από τη θεματική της μέτρησης του «Εμβαδού» προχώρησαν σε μία εις βάθος διερεύνηση. Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά τις εννοιολογικές γνώσεις των μαθητών γύρω από την έννοια της μέτρησης του «Εμβαδού» διαπιστώνουν ότι αρκετά συχνά οι μαθητές θεωρούν πως εάν κατακερματίσουμε ένα σχήμα σε μικρότερα σχήματα ή εάν αλλάξουμε τον προσανατολισμό τους σχήματος στο χώρο, το εμβαδόν του αρχικού σχήματος θα διαφοροποιηθεί (Sisman & Aksu, 2016). Επιπρόσθετα δεν είναι λίγοι οι μαθητές που απαντούν ότι ένα σχήμα έχει περισσότερες από μία επιφάνειες άρα και εμβαδά.

Συνεχίζοντας στην έρευνα των Sisman και Aksu (2016) ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών προσπαθεί να υπολογίσει το εμβαδόν ενός σχήματος υπολογίζοντας τα μήκη των πλευρών του σχήματος ή ακόμα και χρησιμοποιώντας τις μονάδες μέτρησης του μήκους ή του όγκου. Πολύ συχνά μάλιστα οι μαθητές μπερδεύουν την έννοια του «Εμβαδού» με την έννοια του «Όγκου» (Sisman & Aksu, 2016). Αξίζει επίσης να σημειωθεί πως αρκετοί μαθητές δε μπορούν να αντιληφθούν τη διαφορά ανάμεσα στο εμβαδόν ενός κύβου και στην ποσότητα χαρτιού περιτυλίγματος που χρειαζόμαστε για να καλύψουμε όλο τον κύβο (Sisman & Aksu, 2016). Παράλληλα κάποιοι μαθητές απαντούν σχετικά με το εμβαδόν ενός σχήματος εξετάζοντας πρώτα τις ιδιότητες του σχήματος (Sisman & Aksu, 2016). Για παράδειγμα, για πολλούς μαθητές το είδος του γεωμετρικού σχήματος (δηλαδή π.χ. τετράγωνο, τρίγωνο) και ο αριθμός των πλευρών ενός σχήματος καθορίζουν και το εμβαδόν του. Συνάμα σύμφωνα με την έρευνα των Sisman και Aksu (2016), κάποιοι μαθητές πιστεύουν πως εάν οι περίμετροι δύο σχημάτων είναι ίσοι, τότε θα είναι και τα εμβαδά τους.

Όσον αφορά τις εναλλακτικές ιδέες των μαθητών σχετικά με τη διαδικαστική γνώση γύρω από την μέτρηση του εμβαδού, ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών χρησιμοποιεί τον μαθηματικό τύπο για τον υπολογισμό της περιμέτρου ενός σχήματος ή τον μαθηματικό τύπο για τον υπολογισμό του όγκου ενός στερεού, για να υπολογίσει το εμβαδόν του (Sisman & Aksu, 2016). Άλλοτε πάλι οι μαθητές τείνουν να προσθέτουν ή να πολλαπλασιάζουν το μήκος και το πλάτος ή ακόμα και το ύψος ενός σχήματος και έτσι να υπολογίζουν το εμβαδόν του. Παράλληλα πολλές φορές οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες στον υπολογισμό του εμβαδού ενός σχήματος λόγω αδυναμιών στις τέσσερις μαθηματικές πράξεις. Επιγραμματικά πολλές από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές οφείλονται στην αδυναμία τους να ανασύρουν σωστά από τη μνήμη τους τους αλγοριθμικούς μαθηματικούς τύπους για τον υπολογισμό του εμβαδού των επίπεδων σχημάτων, γεγονός που τους οδηγεί στην εφαρμογή λανθασμένων μαθηματικών τύπων (Sisman & Aksu, 2016).

Το γενικό συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουν οι Sisman και Aksu (2016) μέσω της έρευνάς τους είναι ότι οι μαθητές δεν γνωρίζουν τι μετρούν, πώς να μετρούν και γιατί μετρούν, εφόσον δεν έχουν κατανοήσει βασικές μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται στη θεματική ενότητα της μέτρησης του «Εμβαδού», όπως επίσης δεν έχουν κατακτήσει βασικές δεξιότητες που αφορούν την μέτρηση του εμβαδού. Αντίστοιχο συμπέρασμα διατυπώνεται και από τις έρευνες των Furinghetti και Paola (1999, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016), των Kidman και Cooper (1997, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016), των Kamii και Kysh (2006, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016) και του Zacharos (2006, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016). Τέλος και οι Cohen και Moreh (1999, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016), Gilbert (1982, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016) και οι Light, Swarat, Park, Drane, Tevaarwerk και Mason (2007, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016) αναφέρονται και αυτοί στις δυσκολίες που εμφανίζουν οι μαθητές γύρω από τη μαθηματική έννοια της μέτρησης του «Εμβαδού».

Τέτοιες έρευνες, όπως οι παραπάνω, που εστιάζουν στην ανάδειξη των εναλλακτικών ιδεών των μαθητών γύρω από τη θεματική ενότητα του «Εμβαδού» είναι εξαιρετικά ωφέλιμες για τους εκπαιδευτικούς, καθώς όταν οι εκπαιδευτικοί ενημερώνονται για τις εναλλακτικές ιδέες και τις δυσκολίες των μαθητών τους γύρω από τη θεματική ενότητα που πρόκειται να διδάξουν, αυτό τους βοηθά να διαμορφώσουν μία πιο στοχευμένη διδακτική παρέμβαση μέσω της οποίας οι μαθητές τελικώς θα αναδιαμορφώσουν τις αρχικές τους λανθασμένες ιδέες και θα οδηγηθούν στα επιδιωκόμενα μαθησιακά αποτελέσματα (Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang & Loef, 1989, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016). Εξάλλου σύμφωνα με τον Kembitzky (2009, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016), ο εντοπισμός των λανθασμένων ιδεών και των δυσκολιών των μαθητών γύρω από μία μαθηματική έννοια θα πρέπει να αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της διδασκαλίας και της μαθησιακής διαδικασίας των μαθηματικών, καθώς όταν ο εκπαιδευτικός γνωρίζει τις δυσκολίες των μαθητών του μπορεί να παρακολουθεί πιο στενά την πρόοδό τους και να τους παρέχει την απαραίτητη υποστήριξη ώστε οι μαθητές του να ξεπεράσουν τις δυσκολίες τους.

Κεφάλαιο IV: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

4.1 Το αντικείμενο της έρευνας

Σύμφωνα με τους Cohen και Manion (1994), όταν χρησιμοποιούμε τον όρο εκπαιδευτική έρευνα αναφερόμαστε στη συστηματική και δόκιμη εφαρμογή των αρχών μίας επιστήμης της συμπεριφοράς στα προβλήματα διδασκαλίας και μάθησης μέσα στο τυπικό εκπαιδευτικό πλαίσιο. Η ιδιαίτερη αξία της επιστημονικής έρευνας στην εκπαίδευση διαφαίνεται ακριβώς στη δυνατότητά της ότι μπορεί να καταστεί τους εκπαιδευτικούς ικανούς να αναπτύσσουν ένα είδος ισχυρής γνωστικής βάσης και κατ' επέκταση μία τέτοια ικανότητα θα διασφαλίσει για την εκπαίδευση μία ωριμότητα και μία αίσθηση κίνησης προς τα εμπρός (Cohen & Manion, 1994). Συνεπώς τα αποτελέσματα μιας εκπαιδευτικής έρευνας μπορούν να συμβάλλουν στην τροποποίηση και τη βελτίωση διδακτικών πρακτικών ή ακόμα και να οδηγήσουν στην ανάπτυξη νέων αποτελεσματικών διδακτικών πρακτικών.

Πιο συγκεκριμένα, η ποιοτική έρευνα μας βοηθά να διερευνήσουμε ζητήματα για τα οποία η γνώση που διαθέτουμε είναι πενιχρή ή αμφισβητούμενη και να αναπτύσσουμε μία πιο σύνθετη, λεπτομερή περιγραφή και κατανόηση του υπό διερεύνηση ζητήματος (Ίσαρη & Πουρκός, 2015). Σύμφωνα με την Merriam (2009), η ποιοτική έρευνα διερευνά τις διαδικασίες που βρίσκονται πίσω από τις παρατηρούμενες συσχετίσεις μεταξύ παραγόντων, χαρτογραφεί τις απαντήσεις του δείγματος της έρευνας και αναζητά τη σημασία και το πλαίσιο μέσα στο οποίο εκδηλώνεται η συμπεριφορά. Τα βασικά χαρακτηριστικά της ποιοτικής έρευνας είναι ότι το συγκεκριμένο είδος έρευνας εστιάζει στην διαδικασία της έρευνας και στην απόδοση νοήματος, ο ερευνητής είναι το βασικό εργαλείο συλλογής και ανάλυσης δεδομένων, η διαδικασία της έρευνας χαρακτηρίζεται επαγωγική και τέλος το προϊόν της έρευνας είναι πλήρως περιγραφικό (Merriam, 2009).

Εστιάζοντας στην παρούσα έρευνα, χρειάζεται να αναφέρουμε ότι τα μεθοδολογικά χαρακτηριστικά της έρευνας αυτής, φανερώνουν ότι πρόκειται για μία μελέτη περίπτωσης, καθώς περιλαμβάνει την εντατική και σε βάθος μελέτη και την ολιστική περιγραφή μιας σχολικής τάξης 24 μαθητών με σκοπό να καταγραφεί ο τρόπος σκέψης της συγκεκριμένης ομάδας μαθητών και να γίνουν αναγωγές σε συμπεράσματα ποιοτικού χαρακτήρα (Ίσαρη & Πουρκός, 2015· Merriam, 2009). Στα πλαίσια της μελέτης περίπτωσης, η συστηματική και οργανωμένη παρατήρηση των ατομικών συμπεριφορών αποτελεί μία μέθοδο συλλογής και παραγωγής δεδομένων (Ισαρη & Πουρκός, 2015· Merriam, 2009).

Σύμφωνα με τους Cohen και Manion (1994, σ. 152-179), υπάρχουν διαφορετικοί μέθοδοι παρατήρησης ανάλογα με τον βαθμό εμπλοκής και συμμετοχής του παρατηρητή – ερευνητή σε ένα ερευνητικό πεδίο. Στη συγκεκριμένη μελέτη περίπτωσης, ο παρατηρητής ήταν πλήρως εμπλεκόμενος σε όλες τις δραστηριότητες της ομάδας των μαθητών, που επιχειρούσε να παρατηρήσει. Συνεπώς με βάση όσα ορίζουν οι Cohen και Manion (1994, σ. 152-179), επιλέχθηκε η συμμετοχική παρατήρηση των δραστηριοτήτων της υπό διερεύνηση ομάδας με την ενεργή συμμετοχή του παρατηρητή – ερευνητή στη διεξαγωγή της διδασκαλίας. Τέλος, όσον αφορά τους τέσσερις τύπους παρατηρητή που διέκρινε ο Gold (1958, όπ. αναφ. στο Merriam, 2009), στη συγκεκριμένη έρευνα ο παρατηρητής μπορεί να χαρακτηριστεί συμμετέχων ως παρατηρητής.

Μέσω αυτής της έρευνας λοιπόν επιχειρείται να διαπιστωθούν τα μαθησιακά αποτελέσματα μαθητών της ΣΤ’ δημοτικού, τα οποία προκύπτουν στα πλαίσια της διδασκαλίας της έννοιας του εμβαδού αξιοποιώντας διδακτικά τη θεωρία του Πυθαγορείου Θεωρήματος, τον γεωπίνακα και τη διδακτική τεχνική της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας. Παράλληλα αξιοσημείωτο είναι ότι θα διερευνηθούν οι μαθησιακές επιδόσεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του εμβαδού επίπεδων σχημάτων στα πλαίσια διδασκαλιών που αποφεύγουν τη διδασκαλία υπολογισμού των εμβαδών των επίπεδων σχημάτων με μηχανικό τρόπο.

4.2 Το ερευνητικό πρόβλημα

Όπως υποστηρίζει η Hershkowitz (2014, p.p. 542-547) κύριος στόχος της διδασκαλίας της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο είναι η απόκτηση γνώσεων (π.χ. περίμετρος, εμβαδόν) σχετικά με τα βασικά Ευκλείδεια γεωμετρικά σχήματα και τις σχέσεις μεταξύ αυτών. Με σκοπό την επίτευξη αυτού του στόχου, υιοθετείται το μοντέλο διδασκαλίας της γεωμετρίας που προτείνεται από τους Van Hiele (Hershkowitz, 2014, p.p. 542-547· Van de Walle, 2001/2005). Η θεωρία μάθησης των Van Hiele αναφέρεται κατ’ ουσίαν σε μία σειρά από επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, από τα οποία διέρχεται ο μαθητής κατά τη διαδικασία μάθησης, ξεκινώντας από το επίπεδο της «αναγνώρισης των γεωμετρικών σχημάτων» και καταλήγοντας στο επίπεδο της «οπτικοποίησης των γεωμετρικών σχημάτων», δηλαδή στην κατάκτηση της ικανότητας της «αίσθησης του χώρου» (Hershkowitz, 2014, p.p. 542-547). Σύμφωνα με τη θεωρία μάθησης των Van Hiele, η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης του ατόμου επέρχεται σταδιακά μέσα από την απόκτηση εμπειριών που αφορούν τα γεωμετρικά σχήματα, κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας (Hershkowitz, 2014, p.p. 542-547).

Στα πλαίσια αυτής της θεωρίας μάθησης των Van Hiele αναδεικνύεται ο ρόλος της «οπτικοποίησης», δηλαδή της χωρικής αντίληψης κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας (Hershkowitz, 2014, p.p. 542-547). Επιπρόσθετα και η Hershkowitz υπογραμμίζει ότι (2014, p.p. 542-547) κατά το στάδιο της οπτικοποίησης ο μαθητής αρχίζει να «μαθηματικοποιεί» την πραγματικότητα, «μεταφράζοντάς» την σε γεωμετρικές κατασκευές. Συνεπώς κρίνεται αναγκαία η διδασκαλία των δεξιοτήτων χωρικού προσανατολισμού και της χωρικής αντίληψης, ώστε τελικά ο μαθητής να κατασκευάσει γεωμετρική συλλογιστική (Hershkowitz, 2014, p.p. 542-547).

Ωστόσο, το πρόβλημα που διαπιστώνεται είναι ότι κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας στην τάξη δεν παρέχονται σε σημαντικό βαθμό στους μαθητές, εμπειρίες σχετικές με τα σχήματα και τις σχέσεις τους στο χώρο, ώστε οι μαθητές να καλλιεργήσουν χωρική αντίληψη (Hershkowitz, 2014, p.p. 542-547). Κάτι τέτοιο απορρέει από το γεγονός πως οι εκπαιδευτικοί δεν ακολουθούν τις αρχές αυτής της θεωρίας μάθησης κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο και κατά συνέπεια οι βασικοί στόχοι της διδασκαλίας της γεωμετρίας τελικά δεν επιτυγχάνονται (Fielker, 1979).

Επιπρόσθετα, σύμφωνα με έρευνες, μία ακόμα σημαντική δυσκολία που παρατηρείται κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο είναι η τάση διδασκαλίας νορμών γύρω από τις διάφορες γεωμετρικές έννοιες (Hershkowitz, 2014, p.p. 542-547). Με άλλα λόγια, κατά τη διδασκαλία κάθε γεωμετρική έννοια ορίζεται μέσα από μία σειρά ιδιοτήτων που διαθέτει ως έννοια. Έτσι οι εκπαιδευτικοί τείνουν να διδάσκουν στους μαθητές πρότυπα χρήσης και υποδείγματα γεωμετρικών εννοιών, παρά να τους παρέχουν γεωμετρικές εμπειρίες ώστε οι μαθητές να αναπτύσσουν τη διαίσθησή τους γύρω από τα σχήματα και τις σχέσεις τους (Hershkowitz, 2014, p.p. 542-547). Συμπερασματικά, οι μαθητές αποκτούν γεωμετρική σκέψη βάσει προτύπων και αντιλαμβάνονται μόνο τα γεωμετρικά σχήματα και τις σχέσεις που υπακούουν στα πρότυπα που έχουν μάθει (Hershkowitz κα., 1990· Fujita & Jones, 2007, όπ. αναφ. στο Hershkowitz, 2014, p.p. 542-547).

Εξετάζοντας όλα τα παραπάνω σημεία δυσκολίας κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο γίνεται αντιληπτό ότι οι εκπαιδευτικοί έρχονται συχνά αντιμέτωποι με δυσκολίες που αφορούν τον τρόπο διδασκαλίας της γεωμετρίας. Έτσι λοιπόν αρκετά συχνά οι εκπαιδευτικοί αναρωτιούνται πώς μπορούν να επιτυγχάνουν τους διδακτικούς στόχους που θέτουν και παράλληλα να εξασφαλίζουν τα επιθυμητά μαθησιακά αποτελέσματα. Και εδώ ακριβώς αποδεικνύεται η αναγκαιότητα διεξαγωγής της έρευνας στην εκπαίδευση και πιο συγκεκριμένα στη διαδικασία της διδασκαλίας της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο.

Έτσι λοιπόν η αναγκαιότητα της συγκεκριμένης έρευνας αναδεικνύεται πίσω από μία προσπάθεια διερεύνησης σχετικής με το κατά πόσο μπορεί να διαφοροποιηθεί ο βαθμός κατανόησης των μαθητών της ΣΤ’ δημοτικού γύρω από την έννοια του εμβαδού όταν η διδασκαλία περιλαμβάνει τη διδακτική αξιοποίηση ενός χειραπτικού εργαλείου, σε σύγκριση με το συμβατό τρόπο διδασκαλίας που εστιάζει στη διδασκαλία αλγοριθμικών τύπων υπολογισμού του εμβαδού των γεωμετρικών σχημάτων. Γι’ αυτό το λόγο η επιστημονική διερεύνηση επί του θέματος μπορεί να συμβάλλει στη ανάδειξη διδακτικών πρακτικών που μπορούν να βοηθήσουν στην αντιμετώπιση πιθανών δυσκολιών της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Τέλος, αποσαφηνίζοντας το ερευνητικό πρόβλημα της παρούσας εργασίας προκύπτουν τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

- Ο βαθμός κατανόησης της έννοιας του εμβαδού από μαθητές της ΣΤ’ δημοτικού διαφοροποιείται όταν η διδασκαλία της συγκεκριμένης θεματικής περιλαμβάνει την εμβαδική προσέγγιση του Πυθαγορείου Θεωρήματος σε σύγκριση με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας της θεματικής;
- Ο βαθμός κατανόησης της έννοιας του εμβαδού από μαθητές της ΣΤ’ δημοτικού διαφοροποιείται όταν αξιοποιείται διδακτικά ο γεωπίνακας, ως χειραπτικό εργαλείο μάθησης, σε σύγκριση με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας μηχανικών τύπων υπολογισμού της επιφάνειας των επίπεδων σχημάτων;
- Η διδακτική αξιοποίηση της τεχνικής της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας μπορεί να προωθήσει την διερευνητική ικανότητα και την ικανότητα διατύπωσης συμπερασμάτων των μαθητών στα πλαίσια της διδασκαλίας της μέτρησης του εμβαδού;

4.3 Σκοπός και στόχοι της έρευνας

Η εν λόγω έρευνα περιλαμβάνει τον επιλογή, τον σχεδιασμό, την εφαρμογή και την αξιολόγηση της διδασκαλίας γύρω από την έννοια του εμβαδού κατά το μάθημα της γεωμετρίας. Απώτερος σκοπός της έρευνας είναι να διερευνήσει το βαθμό κατανόησης της έννοιας του εμβαδού επίπεδων σχημάτων και το βαθμό ανάπτυξης λογικομαθηματικής σκέψης σε μαθητές της ΣΤ' δημοτικού, όταν εφαρμόζεται η διδακτική τεχνική της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, χρησιμοποιείται ο γεωπίνακας και αξιοποιείται διδακτικά η πρωταρχική εμβαδική αντίληψη του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Τέλος αναμένεται να προκύψουν πρόσθετα ευρήματα σχετικά με τον ρόλο της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας στα πλαίσια της διδασκαλίας της Γεωμετρίας.

Πιο ειδικά, μέσω της συγκεκριμένης έρευνας επιδιώκεται να διερευνηθεί ο βαθμός επίτευξης των διδακτικών στόχων, οι οποίοι τίθενται στα πλαίσια της προσχεδιασμένης διδασκαλίας που ακολουθεί. Στα πλαίσια λοιπόν αυτών των διδακτικών στόχων διερευνάται κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίζουν, να ονομάζουν και να σχεδιάζουν γεωμετρικά σχήματα, κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίζουν τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων και να αναλύουν ή να συνθέτουν γεωμετρικά σχήματα σε άλλα σχήματα. Τέλος, μελετάται κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να υπολογίζουν το εμβαδόν γεωμετρικών σχημάτων με τη χρήση μη τυπικών μονάδων μέτρησης επιφάνειας.

4.4 Διαδικασία συλλογής και παραγωγής δεδομένων

Με σκοπό την συλλογή και την παραγωγή ερευνητικών δεδομένων πραγματοποιήθηκε διδακτική παρέμβαση σε ένα τμήμα της ΣΤ' δημοτικού που αποτελούνταν από 24 μαθητές. Η διδακτική παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε, αφορούσε τη διδασκαλία της έννοιας του εμβαδού επίπεδων σχημάτων μέσω της ασυναίσθητης - για τους μαθητές - εφαρμογής του Πυθαγορείου Θεωρήματος και σε συνδυασμό με τη χρήση του γεωπίνακα με απώτερο σκοπό την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού από τους μαθητές της ΣΤ' δημοτικού. Στα πλαίσια παραγωγής ερευνητικού υλικού, πέρα από τη διδακτική παρέμβαση που έλαβε χώρα, χορηγήθηκαν στους μαθητές της τάξης δύο τεστ αξιολόγησης, ένα πριν (PRE-TEST) και ένα μετά τη διδακτική παρέμβαση (POST-TEST). Στο σημείο αυτό χρειάζεται να υπογραμμίσουμε ότι παρότι η έρευνα ήταν εστιασμένη σε ποιοτικά χαρακτηριστικά και δεδομένα, συλλέχθηκαν και ποσοτικά δεδομένα, τα οποία προέκυψαν από τις γραπτές απαντήσεις των μαθητών στα τεστ διαγνωστικής (PRE-TEST) και τελικής αξιολόγησης (POST-TEST) και καταχωρήθηκαν σε πίνακες.

Πιο συγκεκριμένα, αρχικά χορηγήθηκε στους μαθητές το τεστ διαγνωστικής αξιολόγησης (PRE-TEST) με σκοπό να διερευνηθούν οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών γύρω από την έννοια του εμβαδού αλλά και να διαπιστωθούν οι ικανότητές τους όσον αφορά τον τρόπο υπολογισμού της επιφάνειας διάφορων επίπεδων σχημάτων. Η συμπλήρωση του συγκεκριμένου τεστ από τους μαθητές ολοκληρώθηκε στα πλαίσια μίας διδακτικής ώρας. Κατόπιν, ακολούθησε η διδακτική παρέμβαση που περιελάμβανε την εργασία των μαθητών σε φύλλα εργασίας με δραστηριότητες κατάλληλα σχεδιασμένες, με γνώμονα τους διδακτικούς στόχους που τέθηκαν. Η διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε σε τέσσερις διδακτικές ώρες και για την ακρίβεια ένα διδακτικό δίωρο και δύο ωριαίες διδασκαλίες. Τέλος, ακολούθησε μία ακόμη διδακτική ώρα κατά την οποία οι μαθητές συμπλήρωσαν το τεστ τελικής αξιολόγησης (POST-TEST). Συμπερασματικά λοιπόν χρειάστηκαν 6 διδακτικές ώρες για την συλλογή και την παραγωγή των ερευνητικών δεδομένων της συγκεκριμένης έρευνας.

4.5 Το δείγμα της έρευνας

Σύμφωνα με τον Patton (2002, όπ. αναφ. στο Ίσαρη & Πουρκός, 2015· Merriam, 2009) η δειγματοληψία στην ποιοτική έρευνα αποσκοπεί στο να εντοπίσει περιπτώσεις οι οποίες προσφέρονται για διερεύνηση σε βάθος. Η δειγματοληπτική στρατηγική που επιλέχθηκε για τη συγκεκριμένη έρευνα ήταν η δειγματοληψία ευκολίας (convenience sampling), καθώς η επιλογή του δείγματος έγινε για λόγους ευκολίας, μιας και υπήρχε η δυνατότητα εύκολης πρόσβασης στη συγκεκριμένη σχολική μονάδα (Merriam, 2009). Έτσι λοιπόν το δείγμα της παρούσας έρευνας αποτέλεσαν μαθητές ενός τμήματος της ΣΤ’ δημοτικού ενός δημόσιου σχολείου των Τρικάλων. Παρόλο που οι μαθητές της συγκεκριμένης τάξης ήταν 24 στο σύνολο, τα υποκείμενα της έρευνας ήταν 23 μαθητές (11 κορίτσια και 12 αγόρια), καθώς ένα αγόρι απουσίασε κάποιες φορές κατά τη διδακτική παρέμβαση και συνεπώς εξαιρέθηκε κατά τη συλλογή των ερευνητικών δεδομένων και την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας.

4.6 Μέθοδοι και μέσα συλλογής και παραγωγής δεδομένων

Ως πηγές και μέσα συλλογής και παραγωγής ερευνητικών δεδομένων στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκαν οι παρατηρήσεις που σημείωσε η ερευνήτρια-δασκάλα κατά τη διεξαγωγή των διδακτικών παρεμβάσεων, οι απαντήσεις των μαθητών/τριών στα φύλλα εργασίας της διδακτικής παρέμβασης και στα PRE και POST-TEST, η καταγραφή ηχοληπτικών ντοκουμέντων που αφορούσαν τη δράση και τους διαλόγους μεταξύ των μαθητών/τριών μέσα από τη διαδικασία της ηχογράφησης κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης και η καταγραφή εικονοληπτικών ντοκουμέντων με τη φωτογράφηση κάποιων στιγμιότυπων της δράσης των μαθητών/τριών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Τέλος, στη διαδικασία συλλογής δεδομένων αξιοποιήθηκαν και οι παρατηρήσεις που κατέγραψε εξωτερική παρατηρήτρια-εκπαιδευτικός, στα πλαίσια θεατής και μη συμμετοχικής παρατήρησης κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Η εξωτερική παρατηρήτρια συμπληρώνοντας το Πρωτόκολλο παρατήρησης (βλ. Παράρτημα), το οποίο είχε συντάξει η ερευνήτρια-δασκάλα, κατέγραψε παρατηρήσεις που αφορούσαν κυρίως την ομαδοσυνεργατική εργασία των μαθητών/τριών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Σημειώνεται ότι η εξωτερική παρατηρήτρια απουσίαζε κατά τη διάρκεια της αρχικής και της τελικής αξιολόγησης (PRE και POST-TEST).

4.7 Διδακτική διαδικασία

4.7.1 Η διδασκαλία του εμβαδού στο δημοτικό σχολείο

Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, η μαθηματική έννοια του εμβαδού εισάγεται για πρώτη φορά στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ’ δημοτικού. Σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και το συνακόλουθο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.) για τα Μαθηματικά στο δημοτικό σχολείο, γύρω από τη θεματική ενότητα της Γεωμετρίας στην Δ’ τάξη επιδιώκεται οι μαθητές να εξασκούνται στη μέτρηση της επιφάνειας των γεωμετρικών σχημάτων, να γνωρίζουν τις συνήθεις μονάδες μέτρησης του εμβαδού των γεωμετρικών σχημάτων και να κατανοούν διαισθητικά την έννοια του εμβαδού.

Αντίστοιχα στην Ε’ δημοτικού επιδιώκεται να σταθεροποιήσουν τις γνώσεις τους σχετικά με τις συμβατικές μονάδες μέτρησης της επιφάνειας των γεωμετρικών σχημάτων, να μπορούν να υπολογίζουν τα εμβαδά βασικών γεωμετρικών σχημάτων (δηλ. του τετραγώνου, του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου και του ορθογώνιου τριγώνου), να συγκρίνουν εμβαδά και να κατανοούν ότι η έννοια του εμβαδού είναι διαφορετική από την έννοια της περιμέτρου επιλύοντας προβλήματα.

Τέλος, σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ και Α.Π.Σ. για τα Μαθηματικά στο δημοτικό σχολείο, στην ΣΤ’ δημοτικού επιδιώκεται και πάλι οι μαθητές να σταθεροποιήσουν τις γνώσεις τους σχετικά με τις συμβατές μονάδες μέτρησης της επιφάνειας των γεωμετρικών σχημάτων, να χρησιμοποιούν τους τύπους που επιτρέπουν τον υπολογισμό των εμβαδών των γεωμετρικών σχημάτων και να υπολογίζουν τα εμβαδά του τριγώνου, του παραλληλόγραμμου, του τραπεζίου και του κύκλου. Θα πρέπει βέβαια να επισημανθεί ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές της ΣΤ’ δημοτικού που αποτέλεσαν το δείγμα της έρευνας δεν είχαν διδαχθεί τη θεματική ενότητα του εμβαδού μέχρι τη στιγμή που πραγματοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση, στο τρέχον ωρολόγιο πρόγραμμα της σχολικής χρονιάς 2017-2018.

Συνάμα, στη σχολική εκπαίδευση οι μαθητές διδάσκονται το Πυθαγόρειο Θεώρημα σε συνάρτηση με τη διδασκαλία της έννοιας του εμβαδού για πρώτη φορά στο μάθημα των Μαθηματικών στη Β’ γυμνασίου. Στα πλαίσια της διδασκαλίας του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο μάθημα των Μαθηματικών στη Β’ γυμνασίου, τίθενται ως διδακτικοί στόχοι το να γνωρίζουν οι μαθητές το Πυθαγόρειο θεώρημα και να μπορούν να επιλύουν προβλήματα με τη χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Συνεπώς η επιλογή της ερευνήτριας να εκπονήσει τη συγκεκριμένη έρευνα σε δείγμα μαθητών της ΣΤ’ δημοτικού στηρίζεται στο γεγονός ότι οι μαθητές σε αυτήν την ηλικία είναι σε θέση να αναγνωρίζουν τα χαρακτηριστικά των γεωμετρικών σχημάτων, μπορούν να ταξινομούν τα γεωμετρικά σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους, μπορούν να σχεδιάζουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα, έχουν εξασκηθεί στον υπολογισμό των εμβαδών των βασικών γεωμετρικών σχημάτων (δηλ. του τετραγώνου, του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου και του ορθογώνιου τριγώνου) και είναι σε θέση να διακρίνουν την έννοια του εμβαδού από την έννοια της περιμέτρου. Επιπρόσθετα και πιο γενικά οι μαθητές αυτής της ηλικίας έχουν κατανοήσει σε σημαντικό βαθμό τις απλές γεωμετρικές έννοιες, έχουν εξοικειωθεί με τις μετρήσεις επιφάνειας και έχουν αποκτήσει την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι η επιλογή δείγματος μαθητών της ΣΤ’ δημοτικού σχετίζεται άμεσα και με την άποψη ότι η εμβαδική προσέγγιση του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο δημοτικό σχολείο μπορεί να προετοιμάσει του μαθητές με σκοπό την ορθότερη μαθηματικά διαπραγμάτευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο γυμνάσιο.

Έτσι λοιπόν οι δραστηριότητες, πάνω στις οποίες στηρίχθηκε η διδακτική παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε, σχεδιάστηκαν με γνώμονα όλα όσα έχουν διδαχθεί οι μαθητές αυτής της ηλιακής τάξης γύρω από τη θεματική ενότητα της γεωμετρίας και με βάση τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές του δημοτικού γύρω από την έννοια του εμβαδού και τον υπολογισμό της επιφάνειας επίπεδων σχημάτων, όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία. Μάλιστα κάποιες από τις δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν είναι μεγαλύτερου βαθμού δυσκολίας σε σχέση με τις δραστηριότητες που συνηθίζουν να διαπραγματεύονται οι μαθητές στο δημοτικό και γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο θα μπορούσαν να έχουν διδακτικό και ερευνητικό ενδιαφέρον.

4.7.2 Οργάνωση των ομάδων εργασίας

Με σκοπό την εφαρμογή του ομαδοσυνεργατικού μοντέλου TAI κατά τη διδακτική παρέμβαση, η ερευνήτρια – δασκάλα συνέθεσε τέσσερις ανομοιογενείς ομάδες εργασίας των πέντε μαθητών/τριών και μία ανομοιογενή ομάδα των τεσσάρων μαθητών/τριών. Κάθε ομάδα εργασίας αποτελούνταν από μαθητές υψηλού, μέτριου και χαμηλού γνωστικού επιπέδου, διαφορετικού φύλου και διαφορετικής πολιτισμικής προέλευσης. Στη συνέχεια, η ερευνήτρια - δασκάλα σχημάτισε δύο μικρότερες υπο-ομάδες μαθητών εντός κάθε ομάδας εργασίας. Συγκεκριμένα σε καθεμία ομάδα εργασίας από τις πενταμελείς ομάδες, σχηματίστηκαν εσωτερικά μία υπο-ομάδα δύο μαθητών και μία υπο-ομάδα τριών μαθητών. Αντίστοιχα και στην τετραμελή ομάδα εργασίας, υπο-σχηματίστηκαν εσωτερικά δύο υπο-ομάδες των δύο μαθητών. Η μία υπο-ομάδα που σχηματίστηκε εσωτερικά της τετραμελούς ομάδας περιελάμβανε μαθητές με διαφορετικό μαθησιακό επίπεδο, ενώ η άλλη υπο-ομάδα ήταν ομοιογενής και αποτελούνταν από δύο μαθητές που ανήκουν στο υψηλό γνωστικό επίπεδο. Οι μαθητές εργάστηκαν ομαδοσυνεργατικά καθ' όλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης.

4.7.3 Η διδακτική παρέμβαση

Αφού χορηγήθηκε στους μαθητές το τεστ διαγνωστικής αξιολόγησης (PRE-TEST) (βλ. Παράρτημα), του οποίου η συμπλήρωση διήρκησε μία διδακτική ώρα, στη συνέχεια ακολούθησε η διδακτική παρέμβαση τεσσάρων διδακτικών ωρών.

Το πρώτο διδακτικό δίωρο

Κατά το πρώτο διδακτικό δίωρο της παρέμβασης οι μαθητές εργάστηκαν ομαδοσυνεργατικά με σκοπό να ολοκληρώσουν τρεις δραστηριότητες. Σε κάθε ομάδα εργασίας δόθηκαν δύο γεωπίνακες διαστάσεων 10×10, δηλαδή ένας γεωπίνακας για κάθε υπο-ομάδα και χρωματιστά λαστιχάκια. Επιπλέον χορηγήθηκε σε κάθε μαθητή το Φύλλο Εργασίας 1, που περιελάμβανε τις δραστηριότητες (βλ. Παράρτημα).

Αρχικά η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός παρουσίασε στους μαθητές τον τρόπο χρήσης του γεωπίνακα μέσω μιας επίδειξης, καθώς τα παιδιά δε γνώριζαν καθόλου τον τρόπο χρήσης του συγκεκριμένου χειραπτικού εργαλείου. Κατόπιν οι μαθητές συνεργάστηκαν ομαδοσυνεργατικά με σκοπό την υλοποίηση των δραστηριοτήτων του φύλλου εργασίας.

Δραστηριότητα 1η: «Καλύπτοντας επιφάνειες στον γεωπίνακα»

Κατά την πρώτη δραστηριότητα (βλ. Παράρτημα), οι μαθητές αρχικά κλήθηκαν να απαντήσουν ατομικά ο καθένας στο φύλλο εργασίας του στο υπο-ερώτημα «Υπολόγισε από πόσες τετραγωνικές μονάδες αποτελείται ο γεωπίνακας που έχεις μπροστά σου.», με σκοπό οι μαθητές να αντιληφθούν την επιφάνεια του γεωπίνακα και να συνειδητοποιήσουν τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να υπολογίζουν τις επιφάνειες των σχημάτων που δημιουργούν πάνω στον γεωπίνακα. Τα υπόλοιπα υπο-ερωτήματα της δραστηριότητας σχεδιάστηκαν από την ερευνήτρια με σκοπό την εξάσκηση των μαθητών στον σχεδιασμό, σε γεωπίνακα, γεωμετρικών σχημάτων που υπακούουν σε περιορισμούς που αφορούν το μέγεθος της επιφάνειάς τους, αλλά και στην ονομασία και την ταξινόμηση των γεωμετρικών σχημάτων, ικανότητες οι οποίες θα πρέπει να έχουν κατακτηθεί από τους μαθητές κατά τις προηγούμενες τάξεις.

Έτσι λοιπόν κατά το δεύτερο υπο-ερώτημα οι μαθητές κάθε υπο-ομάδας κλήθηκαν να συνεργαστούν και να σχηματίσουν στο γεωπίνακα, ένα σχήμα με εμβαδόν ίσο με 2 τετραγωνικές μονάδες. Στη συνέχεια ο κάθε μαθητής έπρεπε να αντιγράψει το σχήμα αυτό στο φύλλο εργασίας που περιελάμβανε έναν πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα. Αντίστοιχα, κατά το τρίτο υπο-ερώτημα οι μαθητές κάθε υπο-ομάδας συνεργάστηκαν ώστε να σχηματίσουν στο γεωπίνακά τους ένα σχήμα με εμβαδόν ίσο με μισή τετραγωνική μονάδα, το οποίο στη συνέχεια έπρεπε να μεταφέρουν ατομικά ο καθένας στο δικό του φύλλο εργασίας πάνω στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα.

Κατά το τέταρτο υπο-ερώτημα ζητήθηκε από τους μαθητές κάθε υπο-ομάδας να συνεργαστούν και να σχηματίσουν στο γεωπίνακα δύο διαφορετικά σχήματα που να καλύπτουν επιφάνεια ίση με 1 τετραγωνική μονάδα και κανένα από τα δύο σχήματα να μην είναι τετράγωνο. Και σε αυτήν την περίπτωση, κάθε μαθητής έπρεπε να μεταφέρει τα σχήματα αυτά στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα που υπήρχε στο φύλλο εργασίας του. Τέλος, το πέμπτο υπο-ερώτημα προέτρεπε τους μαθητές κάθε υπο-ομάδας να συνεργαστούν και να σχηματίσουν στο γεωπίνακα δύο σχήματα, τα οποία να καλύπτουν επιφάνεια ίση με 3 και με 5 τετραγωνικές μονάδες αντίστοιχα και έπειτα να μεταφέρουν τα σχήματά τους στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα στο φύλλο εργασίας τους. Συνάμα στα πλαίσια του δεύτερου, τρίτου, τέταρτου και πέμπτου υπο-ερωτήματος, οι μαθητές έπρεπε να ονομάσουν τα γεωμετρικά σχήματα που κατασκεύασαν (π.χ. τρίγωνα, τετράγωνα, κ.λπ.).

Στο τέλος της δραστηριότητας οι μαθητές της μίας υπο-ομάδας έπρεπε να ανταλλάξουν τα φύλλα εργασίας τους με τους μαθητές της άλλης υπο-ομάδας για να ελέγξουν ο ένας τις απαντήσεις του άλλου. Σε περίπτωση που κάποιος μαθητής διαπίστωνε κάποιο λάθος, έδινε οδηγίες στο συμμαθητή του ώστε να κάνει τις απαραίτητες διορθώσεις.

Δραστηριότητα 2η: «Τα χωράφια του κυρ Λάμπρου»

Προτού οι μαθητές εργαστούν στα πλαίσια της 2ης δραστηριότητας του Φύλλου Εργασίας 1 (βλ. Παράρτημα), η ερευνήτρια – εκπαιδευτικός επισήμανε στους μαθητές ότι σε κάθε πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα που υπάρχει στα φύλλα εργασίας τους, η απόσταση της κάθε κουκίδας από την άλλη είναι ίση με 1 εκατοστό. Βάσει αυτού, τους παρακίνησε να υπολογίσουν με πόσα τετραγωνικά εκατοστά ισοδυναμεί η επιφάνεια μίας τετραγωνικής μονάδας. Απώτερος στόχος αυτής της διδακτικής παρέμβασης από τη μεριά της ερευνήτριας ήταν να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές ότι η τετραγωνική μονάδα στον γεωπίνακα είναι μία μονάδα μέτρησης για τον υπολογισμό του εμβαδού ισοδύναμη με την τυπική μονάδα μέτρησης, δηλαδή το τετραγωνικό εκατοστό.

Έπειτα οι μαθητές εργάστηκαν στη 2η δραστηριότητα, στα πλαίσια της οποίας παρουσιάζονταν δύο χωράφια, τα οποία απεικονίζονταν σε πίνακες αναπαράστασης του γεωπίνακα. Οι μαθητές κάθε υπο-ομάδας καλούνταν λοιπόν να συνεργαστούν ώστε να μεταφέρουν τα σχήματα αυτών των χωραφιών στο γεωπίνακα που τους είχε δοθεί και στη συνέχεια να υπολογίσουν και να καταγράψουν τα εμβαδά τους. Οι μαθητές έπρεπε στην ουσία να αναλύσουν τα γεωμετρικά σχήματα που τους δίνονταν σε δύο ή περισσότερα μέρη ώστε να υπολογίσουν τα εμβαδά τους σε τετραγωνικές μονάδες αλλά και να πραγματοποιήσουν μετατροπές από την μη τυπική μονάδα μέτρησης επιφάνειας στην τυπική μονάδα μέτρησης, το τετραγωνικό εκατοστό.

Και σε αυτήν την περίπτωση στο τέλος οι μαθητές της κάθε υπο-ομάδας κλήθηκαν να ανταλλάξουν τα φύλλα εργασίας τους για να ελέγξουν ο ένας τις απαντήσεις του άλλου.

<u>Δραστηριότητα 3η: «Τα οικόπεδά μας»</u>

Στα πλαίσια της 3ης δραστηριότητας (βλ. Παράρτημα) η ερευνήτρια – εκπαιδευτικός μοίρασε πέντε διαφορετικές κάρτες μοτίβων σε κάθε ομάδα εργασίας, δύο ή τρεις κάρτες σε κάθε υπο-ομάδα, αναλόγως το πλήθος των μελών της υπο-ομάδας (βλ. Παράρτημα). Οι κάρτες μοτίβων απεικόνιζαν σχέδια οικοπέδων (βλ. Παράρτημα). Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, οι μαθητές έπρεπε να συνεργαστούν στα πλαίσια της υπο-ομάδας τους ώστε να μεταφέρουν τα σχήματα των οικοπέδων από τις κάρτες στον γεωπίνακα χρησιμοποιώντας τα λαστιχάκια. Έπειτα τους ζητούνταν να αντιγράψουν τα σχήματα των οικοπέδων αυτών πάνω στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα που υπήρχε στο φύλλο εργασίας τους. Τέλος ο καθένας ατομικά έπρεπε να υπολογίσει το εμβαδόν του κάθε σχήματος, να το καταγράψει στο φύλλο εργασίας του και να διαπιστώσει ποιο οικόπεδο έχει τη μεγαλύτερη επιφάνεια.

Τέλος, οι δύο υπο-ομάδες κάθε ομάδας εργασίας έπρεπε να ανταλλάξουν τις κάρτες μοτίβων και τα φύλλα εργασίας τους με σκοπό κάθε υπο-ομάδα να ελέγξει τις απαντήσεις των μαθητών της άλλης υπο-ομάδας παρατηρώντας προσεκτικά τις κάρτες μοτίβων, εφόσον ήταν διαφορετικές από τις δικές τους.

Πρόκειται για μία δραστηριότητα που σχεδιάστηκε με σκοπό να εξασκήσει την ικανότητα ανάλυσης γεωμετρικών σχημάτων σε δύο ή περισσότερα σχήματα με στόχο τον υπολογισμό του εμβαδού ενός γεωμετρικού σχήματος, από την πλευρά των μαθητών.

<u>Η τρίτη ωραία διδασκαλία</u>

Στην τρίτη ωριαία διδασκαλία της παρέμβασης που πραγματοποιήθηκε, μοιράστηκαν σε κάθε ομάδα εργασίας δύο γεωπίνακες διαστάσεων 10×10, δηλαδή ένας γεωπίνακας για κάθε υπο-ομάδα, χρωματιστά λαστιχάκια και το ατομικό Φύλλο Εργασίας 2 (βλ. Παράρτημα). Ζητήθηκε από τους μαθητές να δημιουργήσουν πάλι τις ίδιες υπο-ομάδες και να συνεργαστούν με σκοπό να εργαστούν πάνω στους γεωπίνακες και να υλοποιήσουν τις δραστηριότητες του δεύτερου φύλλου εργασίας. Το Φύλλο Εργασίας 2 περιελάμβανε τρεις δραστηριότητες.

Δραστηριότητα 1η: «Τα τετράγωνα»

Σε αυτή τη δραστηριότητα (βλ. Παράρτημα), στο πρώτο υπο-ερώτημα οι μαθητές συνεργάστηκαν και σχημάτισαν στον γεωπίνακα τέσσερα τετράγωνα με διαφορετικό εμβαδόν το καθένα. Μετά μετέφεραν τα σχήματα αυτά ο καθένας στο φύλλο εργασίας του πάνω στους πίνακες αναπαράστασης του γεωπίνακα. Στο δεύτερο υπο-ερώτημα οι μαθητές συνεργάστηκαν και κατέγραψαν σε έναν πίνακα το μήκος της πλευράς και το εμβαδόν του κάθε τετραγώνου που σχεδίασαν. Κατόπιν στο τρίτο υπο-ερώτημα της δραστηριότητας κλήθηκαν να παρατηρήσουν τον πίνακα με τις μετρήσεις των μηκών και των εμβαδών των τετραγώνων και να διατυπώσουν κάποιο συμπέρασμα.

Στο τέλος οι μαθητές της κάθε υπο-ομάδας αντάλλαξαν τα φύλλα εργασίας τους για να ελέγξουν ο ένας τις απαντήσεις του άλλου.

Μέσω της συγκεκριμένης δραστηριότητας, προσδοκάται οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν τη σχέση μεταξύ του μήκους της πλευράς ενός τετραγώνου και του εμβαδού του με απώτερο στόχο την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού. Αναδεικνύοντας λοιπόν ένα μοτίβο πίσω από τη σχέση μήκους πλευράς και εμβαδού τετραγώνου, οι μαθητές θα κατανοήσουν υποσυνείδητα τους όρους που εμπλέκονται στον μηχανική χρήση τύπων για τον υπολογισμό του εμβαδού του τετραγώνου.

Δραστηριότητα 2η: «Το τετράγωνο με εμβαδόν 2 στον γεωπίνακα (α' τρόπος κατασκευής)»

Κατά το πρώτο υπο-ερώτημα, οι μαθητές όρισαν στον γεωπίνακα ορθογώνιο τρίγωνο με το μικρότερο εμβαδόν που μπορεί να έχει ένα ορθογώνιο τρίγωνο στον γεωπίνακα, δηλαδή με εμβαδόν ίσο με μισή τετραγωνική μονάδα. Έπειτα, σχημάτισαν τρία τετράγωνα, που το καθένα από αυτά είχε για πλευρά καθεμία από τις πλευρές του τριγώνου. Παράλληλα τους ζητήθηκε να μεταφέρουν αυτά τα σχήματα στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα, που υπήρχε στα φύλλα εργασίας τους.

Στο δεύτερο υπο-ερώτημα, οι μαθητές υπολόγισαν τα εμβαδά των τριών τετραγώνων, που σχημάτισαν με τρόπο ώστε να εφάπτονται στις τρεις πλευρές του τριγώνου, χρησιμοποιώντας τα λαστιχάκια και καλύπτοντας το εσωτερικό των τετραγώνων με ορθογώνια τρίγωνα μισής τετραγωνικής μονάδας. Καθένας κατέγραψε τις μετρήσεις του αυτές σε σχετικό πίνακα που υπήρχε στα φύλλα εργασίας. Με σκοπό τη συμπλήρωση του εν λόγω πίνακα, ζητήθηκε επίσης από τους μαθητές να υπολογίσουν το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων που εφάπτονταν στις κάθετες πλευρές του αρχικού τριγώνου που σχεδίασαν.

Στο τρίτο υπο-ερώτημα της δραστηριότητας αυτής κάθε μαθητής απάντησε ατομικά στα εξής υπο-ερωτήματα «Με πόσες τετραγωνικές μονάδες ισούται το εμβαδόν του τετραγώνου της μεγαλύτερης πλευράς του αρχικού τριγώνου;». Τέλος, στο τέταρτο υπο-ερώτημα, οι μαθητές επιχείρησαν να καταγράψουν το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν συγκρίνοντας τα εμβαδά αυτών των τετραγώνων.

Ο έλεγχος των απαντήσεων των μαθητών έγινε από τους ίδιους τους μαθητές ανταλλάσσοντας τα φύλλα εργασίας τους μεταξύ τους σε κάθε υπο-ομάδα.

Στα πλαίσια αυτής της δραστηριότητας, οι μαθητές μέσω της καθοδηγούμενης ανακάλυψης σχημάτισαν τετράγωνο με εμβαδόν 2 τ.εκ., κατασκευάζοντας υποσυνείδητα το κλασικό σχήμα της «καρέκλας της νύφης», μέσω του οποίου αποδεικνύεται το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Δραστηριότητα 3η: «Το τετράγωνο με εμβαδόν 2 στον γεωπίνακα (β’ τρόπος κατασκευής)»

Στόχος της 3ης δραστηριότητας ήταν και πάλι οι μαθητές να σχεδιάσουν στον γεωπίνακα τετράγωνο με εμβαδόν 2 τετραγωνικές μονάδες ή αλλιώς 2 τ.εκ., αλλά αυτή τη φορά με διαφορετικό τρόπο (βλ. Παράρτημα). Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές εργάστηκαν αξιοποιώντας τη μέθοδο των Βαβυλωνίων για τον υποδιπλασιασμό της τετραγωνικής επιφάνειας. Δηλαδή οι μαθητές σχεδίασαν αρχικά στον γεωπίνακα ένα τετράγωνο με εμβαδόν 4 τετραγωνικές μονάδες και στη συνέχεια το υποδιπλασίασαν δημιουργώντας έτσι ένα τετράγωνο με εμβαδόν 2 τετραγωνικές μονάδες. Οι μαθητές μετέφεραν τα σχήματά τους και στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα στα φύλλα εργασίας τους και έπειτα κατέγραψαν τα συμπεράσματα που προέκυψαν. Στο τέλος, πραγματοποιήθηκε ο αναγκαίος έλεγχος των απαντήσεων μέσω της ανταλλαγής των φύλλων εργασίας των δύο υπο-ομάδων.

Η τέταρτη ωραία διδασκαλία

Κατά το τελευταίο στάδιο της διδακτικής παρέμβασης, οι μαθητές σχημάτισαν και πάλι τις ίδιες υπο-ομάδες ώστε να εργαστούν ομαδοσυνεργατικά. Η ερευνήτρια –

εκπαιδευτικός μοίρασε και πάλι δύο γεωπίνακες διαστάσεων 10×10 σε κάθε ομάδα εργασίας, τα χρωματιστά λαστιχάκια και το Φύλλο Εργασίας 3 (βλ. Παράρτημα), που περιελάμβανε 1 δραστηριότητα.

Δραστηριότητα 1η: «Το τετράγωνο με εμβαδόν 5 (= 1 + 4) στον γεωπίνακα»

Σε αυτή τη δραστηριότητα (βλ. Παράρτημα), οι μαθητές έπρεπε να σχηματίσουν στον γεωπίνακα ορθογώνιο τρίγωνο, τέτοιο ώστε να μπορούν να σχηματίσουν στις δύο κάθετες πλευρές του τετράγωνα με εμβαδόν 4 τετραγωνικές μονάδες και με εμβαδόν 1 τετραγωνική μονάδα αντίστοιχα. Κατόπιν έπρεπε να σχηματίσουν και το τετράγωνο που προέκυπτε με πλευρά την υποτείνουσα του αρχικού τριγώνου αλλά και να μεταφέρουν όλα αυτά τα σχήματα στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα στα φύλλα εργασίας τους, ολοκληρώνοντας έτσι το πρώτο υπο-ερώτημα της δραστηριότητας.

Στη συνέχεια, στο δεύτερο υπο-ερώτημα της δραστηριότητας οι μαθητές έπρεπε να απαντήσουν ατομικά στο ερώτημα: «Με πόσες τετραγωνικές μονάδες ισούται το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά τη μεγαλύτερη πλευρά του αρχικού ορθογωνίου τριγώνου που σχεδιάσατε;».

Έπειτα οι μαθητές ακολουθώντας προσεκτικά τις γραπτές οδηγίες που τους δίνονταν στα φύλλα εργασίας τους και χρησιμοποιώντας τα λαστιχάκια έπρεπε να συνεργαστούν για να επιμερίσουν το τετράγωνο που εφαπτόταν στην υποτείνουσα του αρχικού τριγώνου με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίσουν στο εσωτερικό του ένα τετράγωνο με εμβαδόν 1 τετραγωνική μονάδα και γύρω από αυτό 4 ορθογώνια τρίγωνα. Αυτή η εργασία πραγματοποιήθηκε πάνω στους γεωπίνακες. Ύστερα οι μαθητές έπρεπε να μεταφέρουν στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα, που υπήρχε στα φύλλα εργασίας τους, τόσο το τετράγωνο με εμβαδόν 1 τετραγωνική μονάδα όσο και τα 4 ορθογώνια τρίγωνα με τέτοιο τρόπο ώστε να συνθέσουν ένα δεύτερο τετράγωνο.

Στο τρίτο υπο-ερώτημα, οι μαθητές επιχείρησαν να συγκρίνουν τα εμβαδά των δύο τετραγώνων, που σχημάτισαν στις κάθετες πλευρές του αρχικού τριγώνου κατά το πρώτο υπο-ερώτημα, με τα εμβαδά των τετραγώνων, που σχημάτισαν προηγουμένως στον πίνακα αναπαράστασης. Σε τέταρτο υπο-ερώτημα της δραστηριότητας αυτής, οι μαθητές διατύπωσαν το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν σχετικά με το εμβαδόν του τετραγώνου της μεγαλύτερης πλευράς ενός τριγώνου και τα εμβαδά των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του.

Απώτερος στόχος της δραστηριότητας αυτής ήταν να μάθουν οι μαθητές να σχηματίζουν τετράγωνο με εμβαδόν 5 τ.εκ. με τη βοήθεια της κινέζικης απόδειξης του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Αφού ολοκληρώθηκε η διδακτική παρέμβαση των τεσσάρων διδακτικών ωρών, σε επόμενη διδακτική ώρα χορηγήθηκε στους μαθητές το τεστ τελικής αξιολόγησης (POST-TEST) (βλ. Παράρτημα). Μέσω της συγκεκριμένης αξιολόγησης, η ερευνήτρια θα είναι σε θέση να διαπιστώσει κατά πόσο οι μαθητές αφομοίωσαν τους νέους τρόπους υπολογισμού του εμβαδού επίπεδων σχημάτων, που υπονοούν την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος, τους οποίους διδάχθηκαν κατά την διδακτική παρέμβαση που δέχθηκαν και φυσικά θα μπορέσει να απαντήσει τα ερευνητικά ερωτήματα που έθεσε και να διατυπώσει κρίσεις γύρω από το ερευνητικό πρόβλημα, που την απασχολεί.

Κατόπιν ακολουθεί η συλλογή του ερευνητικού υλικού, η επεξεργασία των αποτελεσμάτων της έρευνας και η εξαγωγή συμπερασμάτων γύρω από το ερευνητικό πεδίο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

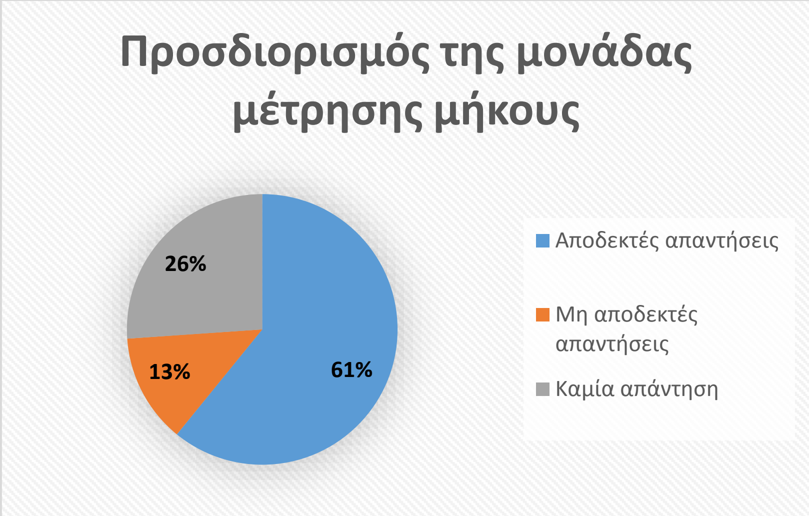
Στο πλαίσιο της αναλυτικής διαδικασίας των αποτελεσμάτων μιας ποιοτικής έρευνας, ο ερευνητής καλείται να εντοπίσει, να περιγράψει, να αναφέρει, να οργανώσει και να κωδικοποιήσει τα ερευνητικά δεδομένα, που έχει συλλέξει, με σκοπό να διαμορφώσει ένα θεματικό χάρτη δεδομένων και συνεπώς να προχωρήσει στην τελική ανάλυση των ευρημάτων που προκύπτουν μέσα από την εξέταση των θεμάτων και νοηματικών μοτίβων που ανέδειξε ο ίδιος (Braun & Clark, 2006, όπ. αναφ. στο Ίσαρη & Πουρκός, 2015· Merriam, 2009).

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα ευρήματα της παρούσας έρευνας κρίνονται αξιόπιστα, και βάσιμα. Ενώ παράλληλα διακρίνονται από συνοχή και υπακούουν σε κανόνες ηθικής και δεοντολογίας. Ωστόσο όσον αφορά τη δυνατότητα εξαγωγής γενικεύσεων, πρέπει να σημειώσουμε ότι τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας είναι ενδεικτικά, χωρίς όμως να είναι και αντιπροσωπευτικά, δεδομένου του μικρού δείγματος της έρευνας αλλά και της μικρής διάρκειας της διδακτικής παρέμβασης, κατά τη διαδικασία συλλογής και παραγωγής δεδομένων.

5.1 Παρουσίαση των αποτελεσμάτων του PRE-TEST

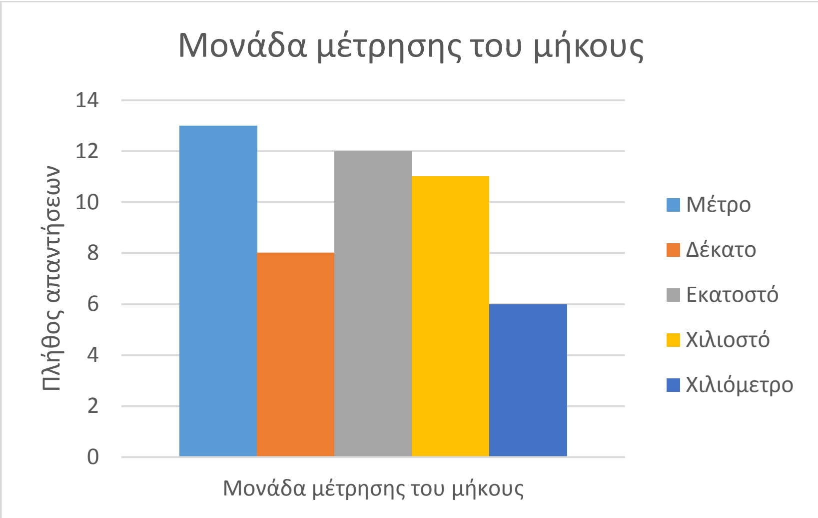
Το τεστ διαγνωστικής αξιολόγησης (PRE-TEST) περιελάμβανε 6 ερωτήματα/δραστηριότητες. Μέσω του συγκεκριμένου τεστ μας δίνεται η ευκαιρία να εξάγουμε συμπεράσματα σχετικά με τις προϋπάρχουσες ιδέες των μαθητών γύρω από την έννοια του εμβαδού αλλά και σχετικά με τις ικανότητές τους όσον αφορά τον τρόπο υπολογισμού της επιφάνειας διάφορων επίπεδων σχημάτων. Σε αυτό το σημείο λοιπόν θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις απαντήσεις των μαθητών/τριών στο PRE-TEST.

Στο πρώτο ερώτημα του PRE-TEST που αφορούσε τον προσδιορισμό της μονάδας μέτρησης του μήκους, οι απαντήσεις των μαθητών προέκυψαν όπως φαίνεται στον Πίνακα 1 που ακολουθεί (βλ. Πίνακα 1).



Πίνακας 1. Προσδιορισμός της μονάδας μέτρησης του μήκους

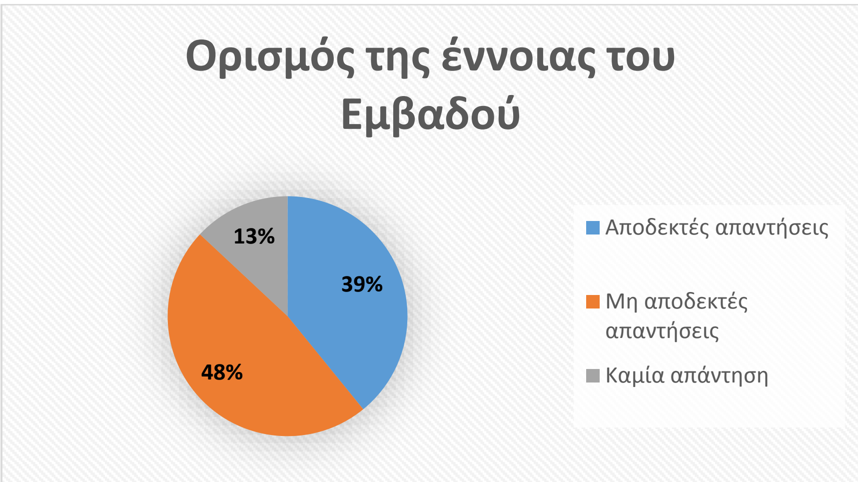
Στο συγκεκριμένο ερώτημα, αποδεκτές κρίθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που ανέφεραν το μέτρο ή τις υποδιαιρέσεις του μέτρου (δηλαδή τα δέκατα, τα εκατοστά, τα χιλιοστά) ή τη μονάδα που είναι πολλαπλάσιο του μέτρου (δηλαδή το χιλιόμετρο) ως μονάδες μέτρησης του μήκους. Στο σύνολο οι μαθητές που έδωσαν αποδεκτές απαντήσεις ήταν 14 και αποτελούν το 61% επί του συνολικού πληθυσμού μαθητών της τάξης. Ωστόσο αξίζει να αναφερθεί ότι στις περιπτώσεις των αποδεκτών απαντήσεων, οι περισσότεροι μαθητές ανέφεραν ως μονάδες μέτρησης του μήκους όλα τα παραπάνω, δηλαδή το μέτρο, το δέκατο, το εκατοστό, το χιλιοστό και το χιλιόμετρο (5 μαθητές). Παράλληλα 3 μαθητές περιελάμβαναν στην απάντησή τους μόνο το μέτρο και κάποιες υποδιαιρέσεις του εκτός όμως από το δέκατο. Σε αντίθεση με 2 μαθητές που απάντησαν το μέτρο και όλες τις υποδιαιρέσεις του, δηλαδή το δέκατο, το εκατοστό και το χιλιοστό. Υπήρξαν άλλοι 2 μαθητές, οι οποίοι ανέφεραν αποκλειστικά και μόνο το μέτρο, ως μονάδα μέτρησης του μήκους. Τέλος βρέθηκε 1 μαθητής που έδωσε ως απάντηση τα μέτρα, τα εκατοστά και τα χιλιόμετρα και άλλος 1 μαθητής, ο οποίος ανέφερε μόνο τα δέκατα, τα εκατοστά και τα χιλιοστά. Μέσα από την καταγραφή των συγκεκριμένων δεδομένων, όπως αυτή προκύπτει στο παρακάτω διάγραμμα (βλ. Διάγραμμα 1) θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε πως οι περισσότεροι μαθητές ανέφεραν το μέτρο ως μονάδα μέτρησης του μήκους και ελάχιστοι μαθητές συμπεριέλαβαν στην απάντησή τους το χιλιόμετρο.



Διάγραμμα 1. Αποδεκτές απαντήσεις μαθητών

Από την άλλη πλευρά, ως μη αποδεκτές κρίθηκαν και οι απαντήσεις 2 μαθητών, οι οποίοι απάντησαν ως εξής: «*Η διαίρεση*». Επίσης στις περιπτώσεις των μη αποδεκτών απαντήσεων βρέθηκε 1 μαθητής, ο οποίος έδωσε την εξής απάντηση: «*Α+Β+Γ+Δ*». Οι 3 μαθητές που απάντησαν λανθασμένα στο συγκεκριμένο ερώτημα αποτελούν μόλις το 13% του συνολικού αριθμού μαθητών της τάξης. Ενώ τέλος οι περιπτώσεις των μαθητών που δεν απάντησαν στο ερώτημα αυτό ήταν 6, διαμορφώνοντας το 26% του γενικού πληθυσμού της τάξης.

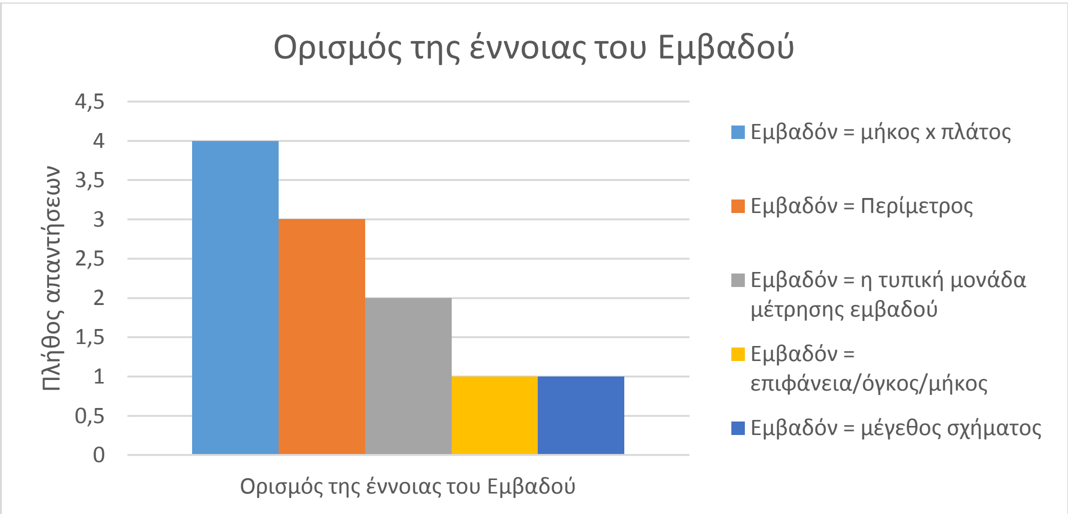
Στο δεύτερο ερώτημα του PRE-TEST που αφορούσε τον προσδιορισμό της μαθηματικής έννοιας του Εμβαδού ενός γεωμετρικού σχήματος, οι μαθητές απάντησαν όπως φαίνεται στον Πίνακα 2 (βλ. Πίνακα 2).



Πίνακας 2. Ορισμός της μαθηματικής έννοιας του Εμβαδού

Σε αυτό το ερώτημα, στις αποδεκτές απαντήσεις ταξινομήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών, κατά τις οποίες όρισαν το Εμβαδόν ως εξής: «*Το εμβαδόν είναι η επιφάνεια του σχήματος*», «*Εμβαδόν είναι ο μέσα χώρος του σχήματος, που βρίσκεται δηλαδή μέσα από το περίγραμμα*», «*Εμβαδόν ονομάζουμε το χώρο που «πιάνει» ένα σχήμα*», «*Εμβαδόν είναι το εσωτερικό τμήμα ενός σχήματος*». Οι μαθητές που έδωσαν αποδεκτές απαντήσεις ήταν 9 ή αλλιώς το 39% του συνόλου των μαθητών.

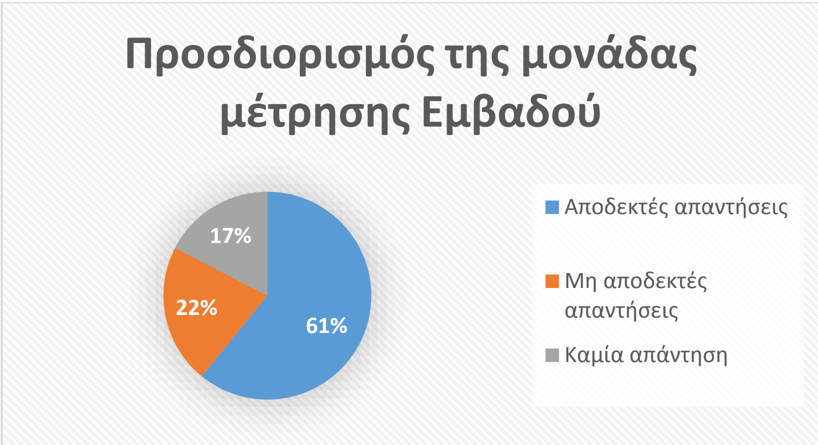
Όμως το σημείο στο οποίο πρέπει να σταθούμε είναι οι απαντήσεις που έδωσαν οι περισσότεροι μαθητές και κρίθηκαν ως μη αποδεκτές, όπως προκύπτουν στο Διάγραμμα 2 (βλ. Διάγραμμα 2). Πρόκειται συνολικά για 11 μη αποδεκτές απαντήσεις, που εκφράζουν το 48% των μαθητών της τάξης. Σε αυτή την περίπτωση, οι περισσότεροι μαθητές προσπάθησαν να ορίσουν την έννοια του Εμβαδού, ως το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του μήκους επί το πλάτος ενός σχήματος (4 μαθητές). Επίσης 3 μαθητές όρισαν το Εμβαδόν ενός γεωμετρικού σχήματος ως το συνολικό μήκος του σχήματος. Ενδιαφέρον επίσης υπάρχει στις απαντήσεις 2 μαθητών, οι οποίοι ορίζουν το Εμβαδόν ως το σύνολο των τετραγωνικών μέτρων ενός σχήματος. Για να γίνουμε πιο σαφείς, αναφορικά μία ενδεικτική τέτοια απάντηση είναι η εξής: «*Εμβαδόν ονομάζουμε πόσα τετραγωνικά μέτρα ή εκατοστά είναι το σχήμα που μας δίνεται*». Ένας άλλος μαθητής δίνει την εξής απάντηση: «*Εμβαδόν ονομάζουμε το «μέσα» ενός σχήματος, τον όγκο, το μήκος*», κάτι που φανερώνει ότι ο συγκεκριμένος μαθητής συγχέει την έννοια του εμβαδού ενός σχήματος με την έννοια του όγκου και την έννοια του μήκους. Τέλος, διαπιστώθηκε μία περίπτωση μαθητή που όρισε το Εμβαδόν ως το μέγεθος ενός σχήματος.



Διάγραμμα 2. Μη αποδεκτές απαντήσεις μαθητών

Από την άλλη πλευρά, μόλις 3 μαθητές άφησαν αναπάντητο το ερώτημα αυτό.

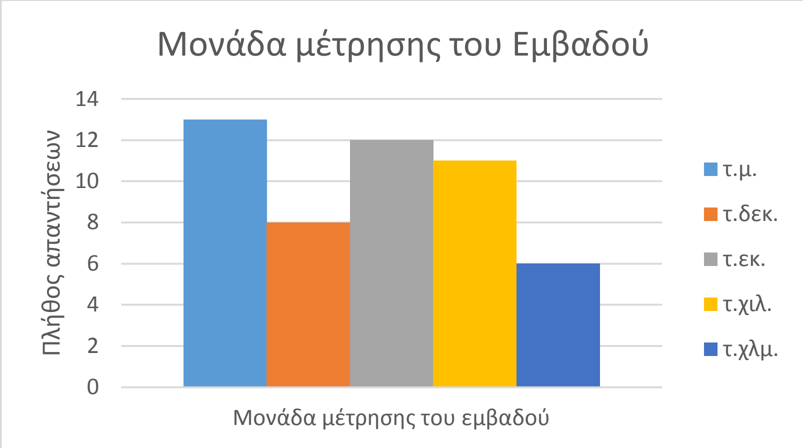
Προχωρώντας στο τρίτο ερώτημα του PRE-TEST, μέσω του οποίου ζητούνταν από τους μαθητές να αναφέρουν τη μονάδα μέτρησης του εμβαδού, παρατηρούμε ότι 14 μαθητές (61%) δίνουν αποδεκτές απαντήσεις, ενώ μόλις 5 μαθητές ή αλλιώς το 22% των μαθητών δίνουν απαντήσεις, οι οποίες χαρακτηρίζονται ως μη αποδεκτές (βλ. Πίνακας 3). Ωστόσο και σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν 4 μαθητές που αποφεύγουν να απαντήσουν την ερώτηση (βλ. Πίνακας 3).



Πίνακας 3. Προσδιορισμός της μονάδας μέτρησης του Εμβαδού

Και σε αυτό το ερώτημα όπως και στο πρώτο ερώτημα, αποδεκτές κρίθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που ανέφεραν το τετραγωνικό μέτρο ή τις υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου (δηλαδή τα τετραγωνικά δέκατα, τα τετραγωνικά εκατοστά, τα τετραγωνικά χιλιοστά) ή τη μονάδα που είναι πολλαπλάσιο του τετραγωνικού μέτρου (δηλαδή το τετραγωνικό χιλιόμετρο) ως μονάδες μέτρησης του εμβαδού. Καταγράφοντας και αναλύοντας τις αποδεκτές απαντήσεις των μαθητών (βλ. Διάγραμμα 3) διαπιστώνουμε ότι οι περισσότεροι μαθητές ανέφεραν ως μονάδα μέτρησης του εμβαδού το τετραγωνικό μέτρο, ενώ οι λιγότεροι μαθητές αναφέρουν στην απάντησή τους και το τετραγωνικό χιλιόμετρο. Αξιοσημείωτο είναι ότι κανείς δε αναφέρει το στρέμμα, καθώς είναι κι αυτή μία τυπική μονάδα μέτρησης του εμβαδού που διδάσκεται στο δημοτικό σχολείο.

Όσον αφορά τις μη αποδεκτές απαντήσεις μαθητών στο συγκεκριμένο ερώτημα, αξίζει να σημειωθεί ότι 3 μαθητές θεωρούν ότι ο πολλαπλασιασμός του μήκους επί του πλάτους ενός γεωμετρικού σχήματος αποτελεί τη μονάδα μέτρησης του εμβαδού. Ενώ 2 άλλες περιπτώσεις μαθητών αναφέρουν την περίμετρο ως τη μονάδα μέτρησης του εμβαδού.

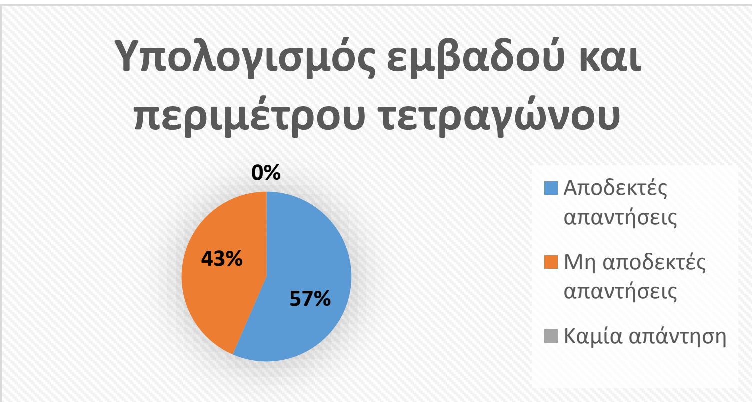


Διάγραμμα 3. Αποδεκτές απαντήσεις μαθητών

Το τέταρτο ερώτημα του PRE-TEST περιελάμβανε δύο υπο-ερωτήματα, εκ των οποίων στο πρώτο υπο-ερώτημα οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά 2 εκατοστών και στο δεύτερο υπο-ερώτημα οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν την περίμετρο του ίδιου τετραγώνου.

Παρατηρώντας τις απαντήσεις των μαθητών (βλ. Πίνακας 4) διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει μαθητής που να μην απάντησε στο ερώτημα αυτό. Κάτι τέτοιο φυσικά έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι αρκετοί μαθητές άφησαν αναπάντητα τα ερωτήματα 2 και 3 του φυλλαδίου του PRE-TEST, τα οποία αφορούσαν τη μαθηματική έννοια του εμβαδού.

Από την ανάλυση λοιπόν των απαντήσεων των μαθητών σε αυτό το ερώτημα (βλ. Πίνακας 4) προέκυψε ότι 13 μαθητές (57%) απάντησαν σωστά και στα δύο υπο-ερωτήματα, αναφέροντας ότι το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά 2 εκ. είναι 4 τετραγωνικά εκατοστά, ενώ η περίμετρός του είναι 8 εκατοστά. Ενώ 10 μαθητές (43%) δίνουν λανθασμένες απαντήσεις στα συγκεκριμένα ερωτήματα.



Πίνακας 4. Υπολογισμός του εμβαδού και της περιμέτρου τετραγώνου με πλευρά 2 εκ.

Εξετάζοντας τις λανθασμένες απαντήσεις των 10 μαθητών συμπεραίνουμε ότι οι 4 μαθητές έχουν υπολογίσει το εμβαδόν και την περίμετρο αυτού τετραγώνου, εφαρμόζοντας με μηχανικό τρόπο τους μαθηματικούς τύπους που έχουν διδαχθεί, αλλά παραλείπουν να αναφέρουν τις μονάδες μέτρησης του εμβαδού και της περιμέτρου.

Κατόπιν 3 μαθητές υπολογίζουν λανθασμένα το εμβαδόν του τετραγώνου. Πιο συγκεκριμένα δύο από αυτούς τους μαθητές απαντούν ότι το εμβαδόν του τετραγώνου είναι 16 τ.εκ. και μία μαθήτρια βρίσκει ότι το εμβαδόν είναι 32 τ.εκ. Παρόλα αυτά όμως οι συγκεκριμένοι μαθητές υπολογίζουν σωστά την περίμετρο του τετραγώνου, γεγονός που δείχνει την έλλειψη γνώσεων μόνο ως προς τη μαθηματική έννοια του εμβαδού. Άλλοι 2 μαθητές υπολογίζουν λανθασμένα τόσο το εμβαδόν όσο και την περίμετρο του τετραγώνου. Τέλος μία μαθήτρια εκτελεί σωστά την πράξη για τον υπολογισμό του εμβαδού αλλά γράφει λάθος τη μονάδα μέτρησης του εμβαδού, καθώς αντί να υπολογίσει σε τετραγωνικά εκατοστά υπολογίζει σε εκατοστά, παρόλα αυτά υπολογίζει σωστά την περίμετρο του τετραγώνου.

Το πέμπτο ερώτημα του PRE-TEST περιελάμβανε δύο υπο-ερωτήματα. Κατά το πρώτο υπο-ερώτημα οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν το μήκος κάθε πλευράς ενός τετραγώνου, γνωρίζοντας ότι το εμβαδόν του ισούται με 9 τ.εκ. Στο δεύτερο υπο-ερώτημα οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν την περίμετρο του ίδιου τετραγώνου.

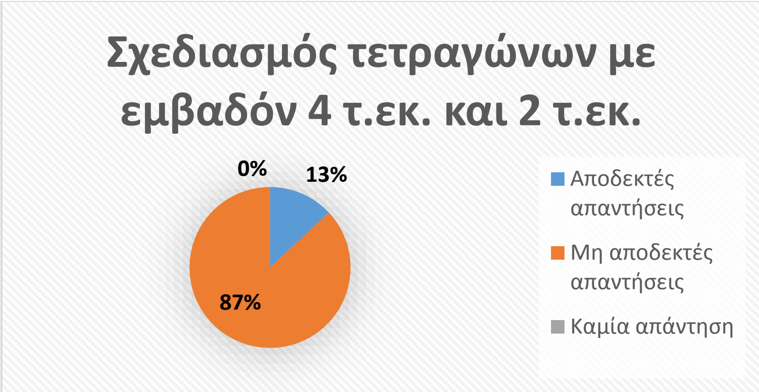
Στο συγκεκριμένο ερώτημα, αποδεκτές κρίθηκαν οι απαντήσεις όσων μαθητών υπολόγισαν ότι το μήκος κάθε πλευράς ενός τετραγώνου με εμβαδόν 9 τ.εκ. είναι 3 εκατοστά και η περίμετρός του είναι 12 εκατοστά. Όπως προκύπτει στον Πίνακα 5, αποδεκτές διαπιστώθηκαν οι απαντήσεις 8 μαθητών (35%) και μη αποδεκτές οι απαντήσεις 15 μαθητών (65%) (βλ. Πίνακα 5).

Πίνακας 5. Υπολογισμός του μήκους της πλευράς και της περιμέτρου τετραγώνου με εμβαδόν 9 τ.εκ.

Στις περιπτώσεις των μη αποδεκτών απαντήσεων, 7 μαθητές προσπάθησαν να υπολογίσουν το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου με εμβαδόν 9 τ.εκ., διαιρώντας το εμβαδόν με το 4 (δηλαδή με τον συνολικό αριθμό των πλευρών του τετραγώνου) και στη συνέχεια στο δεύτερο υπο-ερώτημα εφάρμοσαν τον τύπο υπολογισμού της περιμέτρου του τετραγώνου κάνοντας ουσιαστικά την αντίστροφη πράξη (δηλαδή πολλαπλασίασαν το μήκος της πλευράς, που βρήκαν στο προηγούμενο υπο-ερώτημα, επί 4). Επίσης 4 μαθητές στο πρώτο ερώτημα διαίρεσαν το εμβαδόν του τετραγώνου με το 2, προσπαθώντας λανθασμένα προφανώς να αντιστρέψουν την πράξη υπολογισμού του εμβαδού του τετραγώνου και στο δεύτερο υπο-ερώτημα πολλαπλασίασαν το αποτέλεσμα της πρώτης πράξης με το 4, ακολουθώντας τον τύπο υπολογισμού της περιμέτρου του τετραγώνου. Οι υπόλοιποι 4 μαθητές ακολούθησαν μεθόδους για τον υπολογισμό του μήκους της πλευράς και της περιμέτρου ενός τετραγώνου με εμβαδόν 9 τ.εκ., των οποίων δε μπορούμε να αντιληφθούμε τη λογική.

Στο τελευταίο ερώτημα του PRE-TEST, δινόταν στους μαθητές ένα τετραγωνισμένο χαρτί, πάνω στο οποίο είχε σχεδιαστεί ένα τετράγωνο με εμβαδόν 1 τ.εκ. Με ανάλογο τρόπο οι μαθητές καλούνταν να σχεδιάσουν ένα τετράγωνο με εμβαδόν 4 τ.εκ., κατά το πρώτο υπο-ερώτημα και ένα τετράγωνο με εμβαδόν 2 τ.εκ., κατά το δεύτερο υπο-ερώτημα.

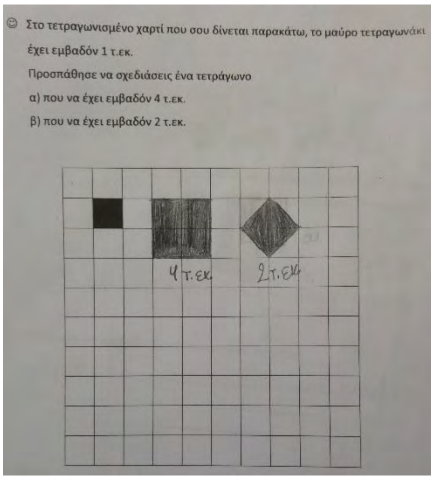
Παρόλο που όλοι οι μαθητές κατάφεραν να σχεδιάσουν σωστά το τετράγωνο με επιφάνεια 4 τ.εκ. του πρώτου υπο-ερωτήματος, διαπιστώθηκαν αρκετές δυσκολίες από τους περισσότερους μαθητές στο σχεδιασμό του τετραγώνου με επιφάνεια 2 τ.εκ. του δεύτερου υπο-ερωτήματος. Συνεπώς οι μαθητές που έδωσαν αποδεκτές απαντήσεις στο συγκεκριμένο ερώτημα, δηλαδή αυτοί που απάντησαν σωστά και στα δύο υπο-ερωτήματα, ήταν ελάχιστοι (3 μαθητές ή 13%) (βλ. Πίνακα 6). Από τη άλλη πλευρά η πλειοψηφία των μαθητών έδωσε μη αποδεκτές απαντήσεις (20 μαθητές ή 87%) (βλ. Πίνακα 6).



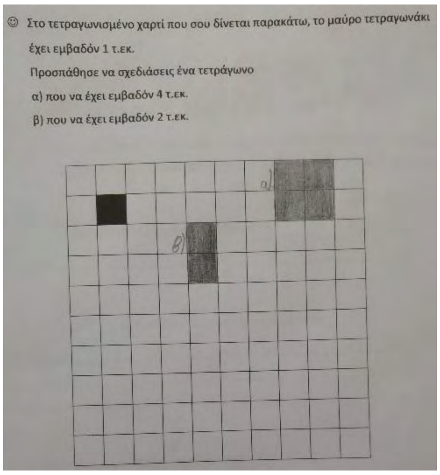
Πίνακας 6. Σχεδιασμός τετραγώνων με εμβαδόν 4 τ.εκ. και 2 τ.εκ. σε τετραγωνισμένο χαρτί

Οι 3 μαθητές που έδωσαν αποδεκτές απαντήσεις στο εν λόγω ερώτημα σχεδίασαν δύο τετράγωνα με επιφάνειες 4 τ.εκ. και 2 τ.εκ., αντίστοιχα όπως αυτά παρουσιάζονται στην Εικόνα 1 (βλ. Εικόνα 1).

Αντίθετα, οι περισσότεροι μαθητές (16 μαθητές) των οποίων οι απαντήσεις κρίθηκαν μη αποδεκτές λόγω λαθών που εντοπίστηκαν στο δεύτερο υπο-ερώτημα, σχεδίασαν ένα ορθογώνιο με επιφάνεια 2 τ.εκ., αντί για τετράγωνο (βλ. Εικόνα 2).



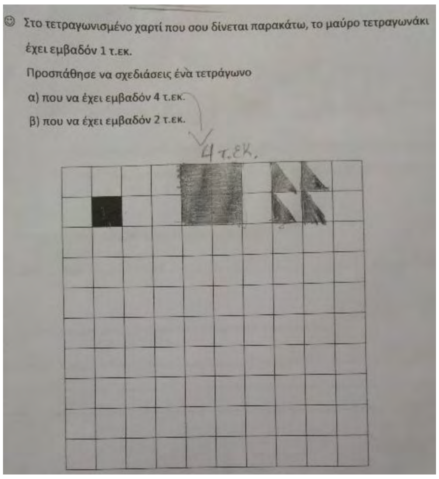
Εικόνα 1. Αποδεκτή απάντηση μαθητή στο τελευταίο ερώτημα του PRE-TEST



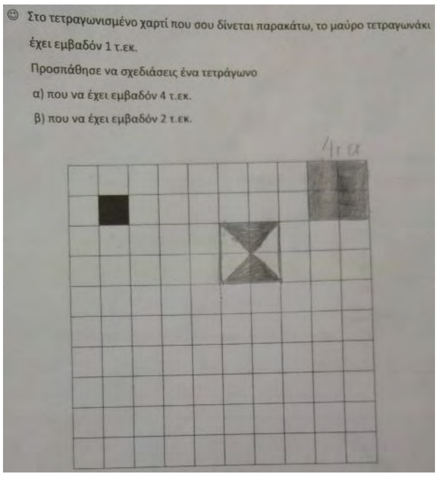
Εικόνα 2. Μη αποδεκτή απάντηση μαθητή στο β υπο-ερώτημα του τελευταίου ερωτήματος του PRE-TEST

Ανάλογα στο δεύτερο υπο-ερώτημα αυτού του ερωτήματος, 3 μαθητές επιχείρησαν να υποδιαιρέσουν τέσσερα τετράγωνα του χαρτιού, χωρίς όμως να καταλήξουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα, δηλαδή το τετράγωνο με εμβαδόν 2 τ.εκ. (βλ. Εικόνα 3, Εικόνα

4). Τέλος, ένας μαθητής ανέφερε πως δε μπορεί να υπάρξει τετράγωνο με εμβαδόν 2 τ.εκ.



Εικόνα 3. Μη αποδεκτή απάντηση μαθητή στο β υπο-ερώτημα του τελευταίου ερωτήματος του PRE-TEST



Εικόνα 4. Μη αποδεκτή απάντηση μαθητή στο β υπο-ερώτημα του τελευταίου ερωτήματος του PRE-TEST

5.2 Ανάλυση των αποτελεσμάτων του PRE-TEST

Σύμφωνα με τον Smith κα.(1993, όπ.αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016) η αναγνώριση των νοητικών παρανοήσεων, των δυσκολιών και των διαισθητικών αντιλήψεων των μαθητών, που λειτουργούν ανασταλτικά στη μαθησιακή διαδικασία, μπορεί να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό στη διαμόρφωση ενός πλάνου διδασκαλίας με σκοπό την ουσιαστική κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας από την πλευρά των μαθητών. Στην προσπάθειά μας λοιπόν να εντοπίσουμε και να αξιολογήσουμε τις νοητικές παρανοήσεις των μαθητών, που αποτέλεσαν το δείγμα της έρευνάς μας, γύρω από τη μαθηματική έννοια του εμβαδού, εστιάσαμε στην ανάλυση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τις απαντήσεις που έδωσαν οι ίδιοι οι μαθητές στο τεστ διαγνωστικής αξιολόγησης (PRE-TEST).

Σύμφωνα μάλιστα με έρευνες (Chappell & Thompson, 1999· Martin & Strutchens, 2000· Robinson, Mahaffey & Nelson, 1975, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016) που έχουν γίνει πάνω στη διδασκαλία και τη μάθηση της μαθηματικής έννοιας της «μέτρησης», διαπιστώνεται ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες κατά τη διδασκαλία της έννοιας της «μέτρησης», ειδικά στις θεματικές ενότητες της μέτρησης του μήκους, του εμβαδού και του όγκου.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί πως όσον αφορά τη διδασκαλία της έννοιας της «μέτρησης», οι τρεις θεματικές ενότητες «μέτρηση μήκους», «μέτρηση εμβαδού» και «μέτρηση όγκου» σχετίζονται άμεσα μεταξύ τους. Εξάλλου η «μέτρηση μήκους» αποτελεί βασική θεματική ενότητα στα μαθηματικά, καθώς οι έννοιες και οι δεξιότητες που εμπλέκονται σε αυτή τη θεματική ενότητα, είναι σημαντικές για τη μετέπειτα διδασκαλία και κατ'επέκταση κατανόηση της έννοιας της μέτρησης του εμβαδού και του όγκου (Nührenbörger, 2001· Outhred, Mitchelmore, McPhail & Gould, 2003· Outhred & Mitchelmore, 2000, όπ. αναφ. στο Sisman & Aksu, 2016). Επιπρόσθετα σύμφωνα με τον Battista (1982), όταν υπολογίζουμε το εμβαδόν ενός σχήματος, τελικά καταλήγουμε να μετράμε μήκη με σκοπό να αξιοποιήσουμε αυτές τις μετρήσεις για να εφαρμόσουμε μαθηματικούς τύπους για τον υπολογισμό εμβαδού.

Γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο μέσω του τεστ διαγνωστικής αξιολόγησης (PRE-TEST) θελήσαμε αρχικά να διερευνήσουμε τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών γύρω από τη θεματική περιοχή της «μέτρησης μήκους». Αναλύοντας λοιπόν τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά το πρώτο ερώτημα του PRE-TEST θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στη θέση ότι οι περισσότεροι μαθητές αναγνωρίζουν κατά κόρον το μέτρο ως μονάδα μέτρησης του μήκους, ενώ ένα σημαντικό ποσοστό του συνόλου των μαθητών, 39% δεν είναι σε θέση να απαντήσει στο ερώτημα «Ποια είναι η μονάδα μέτρησης του μήκους;». Τα ευρήματα αυτά δείχνουν ότι οι μαθητές δεν έχουν εξασκηθεί στη μέτρηση μήκους χρησιμοποιώντας διαφορετικές μονάδες μέτρησης, πέρα του μέτρου και του εκατοστόμετρου. Όπως επίσης διαπιστώνεται ότι ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών δεν έχει κατανοήσει την έννοια της μέτρησης του μήκους, εφόσον δεν είναι σε θέση να γνωρίζει τις μονάδες μέτρησης του μήκους.

Επιπρόσθετα βάσει των απαντήσεων των μαθητών στα ερωτήματα του PRE-TEST, διαπιστώνουμε ότι παρόλο που το 61% των μαθητών γνωρίζει τις μονάδες μέτρησης του εμβαδού, ωστόσο ένα αντίστοιχο ποσοστό μαθητών (61%) ορίζει λανθασμένα την έννοια του εμβαδού ή δεν είναι σε θέση γενικότερα να προσδιορίσει αυτή την έννοια. Κάτι τέτοιο μας παραπέμπει στη θέση που διαπιστώνεται από τον Battista (1982) και τον Murphy (2012) ότι δηλαδή οι μαθητές δυσκολεύονται να ορίσουν την έννοια της μέτρησης του εμβαδού. Και παρόλο που σύμφωνα με τον Murphy (2012), η έννοια της μέτρησης του εμβαδού είναι πολύ γνωστή στους μαθητές καθώς αποτελεί μία θεματική ενότητα που διδάσκεται από πολύ νωρίς στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ωστόσο αποτελεί και μία από τις πιο δυσνόητες μαθηματικές έννοιες για τους μαθητές, καθώς είναι μία πιο αφηρημένη έννοια σε σύγκριση με τη έννοια της μέτρησης του μήκους.

Αντίστοιχα σύμφωνα με αποτελέσματα ερευνών (Baturo & Nason, 1996· Sisman & Aksu, 2016), οι μαθητές δυσκολεύονται να νοηματοδοτήσουν τη μαθηματική έννοια της μέτρησης του εμβαδού, και γι’ αυτό το λόγο παρατηρούμε ότι οι μαθητές έχουν μια επιφανειακή αντίληψη της έννοιας αυτής, γεγονός που τους οδηγεί συχνά και σε παρανοήσεις γύρω από αυτή την έννοια. Οι Baturo και Nason (1996) διαπιστώνουν ότι η δυσκολία στη αντίληψη της έννοιας του εμβαδού οφείλεται στο γεγονός ότι η διδασκαλία της θεματικής αυτής ενότητας συνδέεται άμεσα με τη διδασκαλία μαθηματικών κανόνων και νορμών. Κάτι τέτοιο οδηγεί τους μαθητές στο να συνδέουν τη μαθηματική έννοια του εμβαδού με μαθηματικούς τύπους, τους οποίους προσπαθούν να απομνημονεύσουν, όπως προκύπτει και από τα αποτελέσματα της έρευνάς μας.

Τέλος, τα αποτελέσματα της έρευνάς μας γύρω από τις παρανοήσεις των μαθητών κατά την προσπάθειά τους να ορίσουν την έννοια του εμβαδού συμφωνούν με τα αποτελέσματα της έρευνας των Sisman και Aksu (2016). Πιο συγκεκριμένα, στα πλαίσια της έρευνάς μας αλλά και της έρευνας των Sisman και Aksu (2016), αρκετοί μαθητές ορίζουν την έννοια του εμβαδού ως το μαθηματικό τύπο μήκος επί πλάτος, που χρησιμεύει για τον υπολογισμό του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, άλλοι μαθητές συγχέουν την έννοια του εμβαδού με την έννοια της περιμέτρου και τον μαθηματικό τύπο υπολογισμού της περιμέτρου ενός σχήματος. Παράλληλα κάποιοι άλλοι μαθητές θεωρούν ότι το εμβαδόν είναι απλώς η μονάδα μέτρησης του εμβαδού, γεγονός που δείχνει και την αδυναμία των μαθητών να αντιληφθούν την έννοια της μονάδας μέτρησης του εμβαδού. Τέλος λίγοι μαθητές συγχέουν το εμβαδόν ενός σχήματος με τον όγκο, το μήκος και το μέγεθος ενός σχήματος.

Όμως τα παραπάνω αποτελέσματα έρχονται σε αντίθεση με την ικανότητα των μαθητών του δείγματός μας να υπολογίσουν με ευκολία το εμβαδόν και την περίμετρο ενός τετραγώνου, όπως τους ζητήθηκε στο τέταρτο ερώτημα του PRE-TEST. Καθώς όπως προκύπτει από την έρευνά μας, οι μαθητές είναι σε θέση να εφαρμόσουν μηχανικά τους μαθηματικούς τύπους υπολογισμού του εμβαδού και της περιμέτρου ενός γεωμετρικού σχήματος. Κάτι τέτοιο επιβεβαιώνεται από τον Battista (1982) και από τις έρευνες των Baturo και Nason (1996), Sisman και Aksu (2016) και Murphy

(2012). Ωστόσο αξίζει να σημειωθεί πως οι περισσότεροι μαθητές του δείγματός μας που απαντούν λανθασμένα στο ερώτημα αυτό, έχουν εφαρμόσει σωστά τους μαθηματικούς τύπους υπολογισμού του εμβαδού και της περιμέτρου, αλλά δεν έχουν αναφέρει τις μονάδες μέτρησης εμβαδού που χρησιμοποίησαν για τους υπολογισμούς τους. Αυτό δείχνει πως η προώθηση από τον εκπαιδευτικό της μηχανικής απομνημόνευσης των μαθηματικών τύπων για τον υπολογισμό του εμβαδού κατά τη διδασκαλία, δεν εξασφαλίζει και την ουσιαστική κατανόηση της μέτρησης του εμβαδού από τους μαθητές.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του πέμπτου ερωτήματος, διαπιστώνουμε πως η γνώση που έχουν κατακτήσει οι μαθητές για την μέτρηση του εμβαδού μέσω της μηχανικής εφαρμογής μαθηματικών τύπων δεν τους βοηθάει ώστε να κατανοήσουν τη έννοια της μέτρησης του εμβαδού που κρύβεται πίσω από τα σύμβολα και τα μεγέθη αυτών των μαθηματικών τύπων. Αυτό επιβεβαιώνεται από το γεγονός πως ενώ η πλειοψηφία των μαθητών είναι σε θέση να εφαρμόσει σωστά τον μαθηματικό τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός τετραγώνου με συγκεκριμένη πλευρά, εντούτοις η πλειοψηφία των μαθητών δε μπορεί να υπολογίσει το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου με συγκεκριμένο εμβαδόν.

Τέλος, σύμφωνα με τα αποτελέσματα του τελευταίου ερωτήματος του PRE-TEST, η πλειοψηφία των μαθητών του δείγματός μας δεν είναι σε θέση να σχεδιάζει ένα τετράγωνο με εμβαδόν 2 τετραγωνικά εκατοστά, θεωρώντας μάλιστα πως δε μπορεί να υπάρξει ένα τέτοιο τετράγωνο. Η αδυναμία αυτή των μαθητών οφείλεται πιθανόν στους περιορισμούς που κρύβει η διδασκαλία της μέτρησης του εμβαδού επίπεδων σχημάτων με τη χρήση των μαθηματικών τύπων. Μάλιστα αυτούς τους περιορισμούς επιχειρούμε ως εκπαιδευτικοί να ξεπεράσουμε, διαμορφώνοντας και εφαρμόζοντας, σε ερευνητικό επίπεδο, μία διδακτική παρέμβαση που αφορά τη διδασκαλία της έννοιας του εμβαδού επίπεδων σχημάτων με τη χρήση του γεωπίνακα και την έμμεση εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος κατά τον υπολογισμό της επιφάνειας επίπεδων σχημάτων.

5.3 Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων της διδακτικής παρέμβασης

Βάσει των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τις απαντήσεις των μαθητών στο τεστ διαγνωστικής αξιολόγησης (PRE-TEST), είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε ότι το Εμβαδόν και η μέτρησή του είναι μαθηματικές έννοιες, οι οποίες δεν έχουν γίνει κατανοητές για τους μαθητές και τις μαθήτριες της συγκεκριμένης τάξης. Συνάμα βάσει των αποτελεσμάτων της έρευνάς μας αλλά και σύμφωνα με τους Battista (1982), Baturo και Nason (1996), Sisman και Aksu (2016) και Murphy (2012), διαπιστώνουμε ότι η διδασκαλία της θεματικής ενότητας της «μέτρησης του Εμβαδού» μέσω των συμβατικών διδακτικών μεθόδων οδηγεί συχνά τους μαθητές στη δημιουργία νοητικών παρανοήσεων. Κατ' επέκταση διαμορφώσαμε και εφαρμόσαμε μία διδακτική παρέμβαση τεσσάρων διδακτικών ωρών, η οποία αφορούσε τη διδασκαλία της έννοιας του Εμβαδού επίπεδων σχημάτων με τη χρήση του γεωπίνακα και μέσω της έμμεσης εφαρμογής του Πυθαγορείου Θεωρήματος στα πλαίσια της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας με σκοπό να διερευνήσουμε τις επιδόσεις των μαθητών γύρω από αυτήν την θεματική ενότητα διδασκαλίας.

Η διδακτική παρέμβαση περιελάμβανε την εργασία των μαθητών σε τρία διαφορετικά φύλλα εργασίας. Κατά το πρώτο συνεχές διδακτικό δίωρο οι μαθητές εργάστηκαν στο πρώτο φύλλο εργασίας και κατόπιν ακολούθησαν άλλες δύο μονόωρες διδασκαλίες, κατά τις οποίες οι μαθητές εργάστηκαν σε άλλα δύο φύλλα εργασίας. Οι μαθητές εργάζονταν κατά ομάδες καθ' όλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, σύμφωνα με τις αρχές του ομαδοσυνεργατικού μοντέλου TAI, ενώ η δασκάλα-ερευνήτρια περιφερόταν στη τάξη με σκοπό να κατευθύνει και να προωθήσει την εργασία όλων των ομάδων εργασίας.

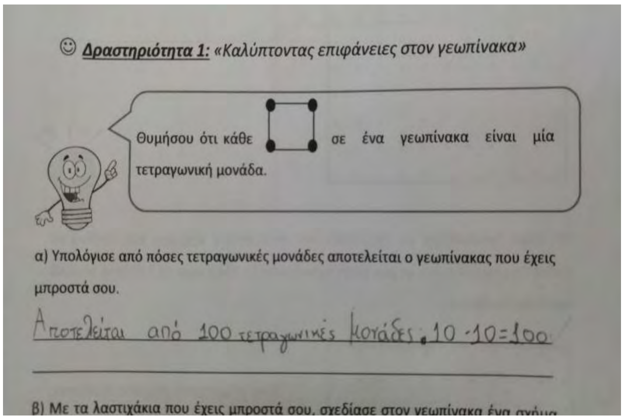
Στη συνέχεια θα παραθέσουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών/τριών στις ομαδικές δραστηριότητες, που περιελάμβαναν τα τρία διαφορετικά φύλλα εργασίας. Μάλιστα κατά την ποιοτική αυτή ανάλυση των αποτελεσμάτων, θα παραθέσουμε κάποιους μαγνητοφωνημένους διαλόγους που έλαβαν χώρα μεταξύ των μαθητών/τριών κατά τη διάρκεια διεξαγωγής των τριών αυτών διδασκαλιών, αλλά και φωτογραφικό υλικό στο οποίο αποτυπώνεται ο τρόπος εργασίας των μαθητών. Οι καταγεγραμμένοι αυτοί διάλογοι αλλά και το φωτογραφικό υλικό είναι ενδεικτικοί του τρόπου ανταπόκρισης των μαθητών της συγκεκριμένης τάξης στη διδακτική παρέμβαση που τους παραχωρήθηκε.

5.3.1 Πρώτο φύλλο εργασίας

Κατά την έναρξη της διδακτικής παρέμβασης, η ερευνήτρια-δασκάλα παρουσίασε στους μαθητές τον τρόπο χρήσης του γεωπίνακα, ως χειραπτικό εργαλείο στα Μαθηματικά. Επιπρόσθετα διευκρίνισε στους μαθητές ότι η τετραγωνική μονάδα είναι η μονάδα μέτρησης του εμβαδού επίπεδων σχημάτων που έχουν κατασκευαστεί πάνω σε έναν γεωπίνακα.

<u>Δραστηριότητα 1η: «Καλύπτοντας επιφάνειες στον γεωπίνακα»</u>

Στο πρώτο υπο-ερώτημα της πρώτης δραστηριότητας οι μαθητές με σχετική ευκολία υπολόγισαν από πόσες τετραγωνικές μονάδες αποτελείται ο γεωπίνακας που είχαν στη διάθεσή τους. Μάλιστα κανένας μαθητής δε δυσκολεύθηκε στον τρόπο υπολογισμού των τετραγωνικών μονάδων του γεωπίνακα. Έτσι και οι 23 μαθητές δήλωσαν ότι ο γεωπίνακας που τους είχε δοθεί αποτελείται από 100 τετραγωνικές μονάδες. Ωστόσο ενδιαφέρον παρατηρείται στον τρόπο, που επέλεξε κάθε μαθητής για να υπολογίσει τις τετραγωνικές μονάδες του γεωπίνακα. Όπως παρατήρησε η ερευνήτρια-δασκάλα, 13 μαθητές επέλεξαν να υπολογίσουν τις τετραγωνικές μονάδες του γεωπίνακα μετρώντας 1-1 τα τετράγωνα που φαίνονταν σκιαγραφημένα στον γεωπίνακα και τα οποία στην ουσία αντιστοιχούσαν στις τετραγωνικές μονάδες. Οι υπόλοιποι 10 μαθητές επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν τη μέθοδο υπολογισμού του εμβαδού του τετραγώνου που έχουν διδαχθεί, υπολογίζοντας τα μήκη δύο κάθετων πλευρών του γεωπίνακα και έπειτα πολλαπλασιάζοντας τις τετραγωνικές μονάδες της μίας πλευράς με τις τετραγωνικές μονάδες της άλλης κάθετης πλευράς (δηλ. 10 x 10 = 100 τετραγωνικές μονάδες) (βλ. Εικόνα 1).

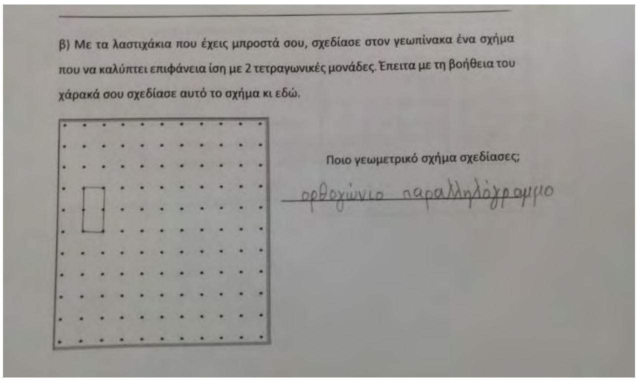


Εικόνα 1. Απάντηση μαθήτριας στο υπο-ερώτημα α της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 1

Κάτι τέτοιο μπορεί να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι ενώ όλοι οι μαθητές της συγκεκριμένης τάξης γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού των τετραγώνων, καθώς έχουν διδαχθεί αρκετές φορές και σε προηγούμενες τάξεις το μαθηματικό τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού του τετραγώνου (δηλ. εμβαδόν τετραγώνου = πλευρά x πλευρά), ωστόσο έχουν απλώς απομνημονεύσει τον μαθηματικό τύπο χωρίς να έχουν κατανοήσει τη μαθηματική έννοια του εμβαδού. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι σε μια ερώτηση όπως αυτή «Υπολόγισε από πόσες τετραγωνικές μονάδες αποτελείται ο γεωπίνακας που έχεις μπροστά σου.», η οποία δε τους ζητάει άμεσα να υπολογίσουν το εμβαδόν του γεωπίνακα, αλλά έμμεσα αυτό υπονοεί, οι περισσότεροι μαθητές (57 %) δε χρησιμοποιούν τον μαθηματικό τύπο, που γνωρίζουν, για τον υπολογισμό του εμβαδού του τετραγώνου.

Κατά τα υπόλοιπα τέσσερα υπο-ερωτήματα της πρώτης δραστηριότητας αυτού του φύλλου εργασίας, οι μαθητές έδειξαν να εξοικειώνονται με τη χρήση του γεωπίνακα μέσα από την κατασκευή διάφορων σχημάτων με συγκεκριμένες επιφάνειες, όπως τους ζητούνταν από τις εκφωνήσεις των υπο-ερωτημάτων αυτών. Στα πλαίσια αυτών των υπο-ερωτημάτων ζητήθηκε από τους μαθητές να μεταφέρουν τα σχήματα, που κατασκεύασαν στους γεωπίνακες, στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα που υπήρχε στα φύλλα εργασίας. Τέλος, μέσω αυτών των υπο-ερωτημάτων αξιολογήσαμε και τη δυνατότητα των μαθητών να ονομάσουν τα γεωμετρικά σχήματα.

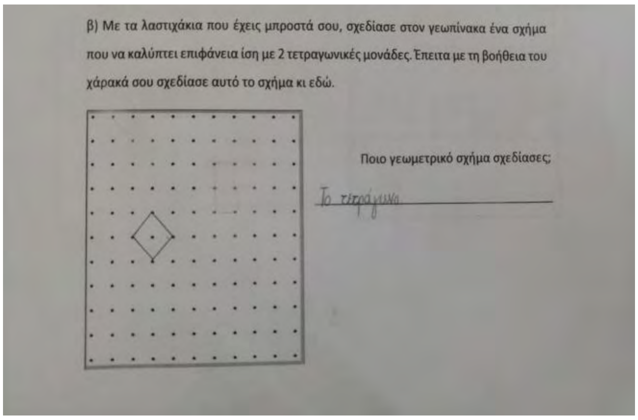
Στα συγκεκριμένα υπο-ερωτήματα της πρώτης δραστηριότητας, οι μαθητές διευρενητικά επιχείρησαν να σχεδιάσουν με τα πολύχρωμα λαστιχάκια σχήματα με συγκεκριμένο εμβαδόν πάνω στον γεωπίνακα που τους είχε δοθεί. Το εμβαδόν των σχημάτων, που έπρεπε να κατασκευάσουν, το υπολόγιζαν με σχετική ευκολία μετρώντας τις τετραγωνικές μονάδες, δηλαδή τα σκιαγραφημένα τετράγωνα στον γεωπίνακα. Στα πλαίσια αυτών των υπο-ερωτημάτων καταγράφθηκαν ενδιαφέροντες διάλογοι μεταξύ των μαθητών, μέσω των οποίων θα μπορούσαμε να παρακολουθήσουμε τον τρόπο σκέψης και εργασίας των μαθητών.



Εικόνα 2. Απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα β της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 1

Στο δεύτερο υπο-ερώτημα αυτής της δραστηριότητας, όπου ζητούνταν από τους μαθητές να κατασκευάσουν στον γεωπίνακα ένα σχήμα με εμβαδόν ίσο με 2 τετραγωνικές μονάδες, 21 μαθητές κατασκεύασαν άμεσα με ευκολία ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με αυτή την επιφάνεια (βλ. Εικόνα

2), ενώ 2 μαθητές, που στάθηκαν περισσότερο διερευνητικοί σχεδίασαν ένα τετράγωνο (βλ. Εικόνα 3). Συνάμα όλοι οι μαθητές μετέφεραν με ευκολία τα σχήματά τους στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα, που υπήρχε στο φύλλο εργασίας τους.



Εικόνα 3. Απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα β της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 1

Επίσης όσον αφορά την ονομασία των σχημάτων τους, 22 μαθητές ονόμασαν σωστά το σχήμα τους, ότι δηλαδή πρόκειται είτε για ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είτε για τετράγωνο, ενώ 1 μόνο μαθητής που είχε κατασκευάσει τετράγωνο θεώρησε ότι είναι ρόμβος. Κατά το υπο-ερώτημα αυτό έλαβαν χώρα οι εξής διάλογοι μεταξύ των μελών των ομάδων:

Διάλογος α':

Μ1 : «*Εύκολο είναι! Αν τεντώσουμε το λαστιχάκι για να πιάσει 2 τετράγωνα…Να το! Έτοιμο!*»

Μ2 : «*Για να το δω κι εγώ. Μπράβο! Άρα φτιάξαμε ένα ορθογώνιο.*»

Μ1 : «*Μήπως να γράψουμε πιο σωστά ότι φτιάξαμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;*»

Μ2 : «*Ναι. Δίκιο έχεις.*»

Διάλογος β':

Μ1 : «*Εάν επιλέξουμε δύο τετραγωνικές μονάδες μπορούμε να φτιάξουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.*»

Μ2 : «*Ναι. Αλλά σκέφτομαι να δοκιμάσουμε εάν μπορούμε να βρούμε και κανένα άλλο σχήμα…*»

Μ1 : «*Πώς όμως; Αφού εάν το φτιάξουμε οριζόντια, πάλι το ίδιο σχήμα βγαίνει. Άρα το ίδιο πράγμα είναι. Πάλι ορθογώνιο θα κάνουμε.*»

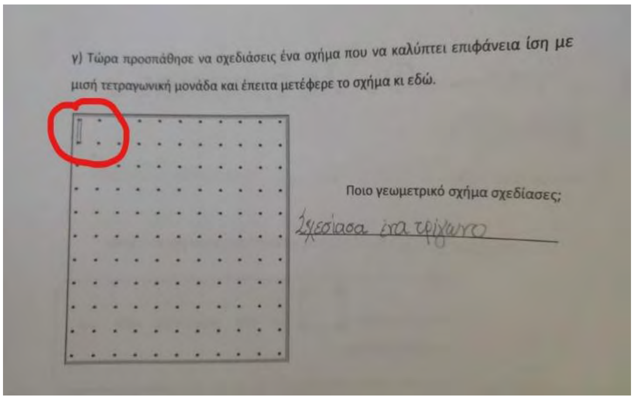
Μ2 : «*Ναι. Αλλά αν το κάνουμε διαφορετικά; Δεν ξέρω εάν είναι σωστό. Αλλά εάν κάνουμε ένα ρόμβο….Κοίτα! Μισή και μισή τετραγωνική μονάδα, μας κάνει μία* *ολόκληρη. Και άλλες δύο μισές, άλλη μία ολόκληρη. Άρα βγαίνει ρόμβος με 2 τετραγωνικές μονάδες.»*

M1 : «*Ωραία. Ας αφήσουμε αυτό. Το σχεδίασα και στο χαρτί. Αλλά μου φαίνεται ότι είναι τετράγωνο γιατί όλες οι πλευρές του είναι ίσες και όλες του οι γωνίες είναι ορθές.*»

M2 : «*Ας ρωτήσουμε την κυρία.*»

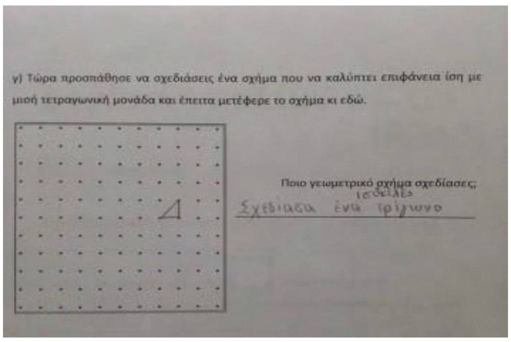
Ερευνήτρια : «*Καλή σκέψη!*»

Στο τρίτο υπο-ερώτημα αυτής της δραστηριότητας, όπου ζητούνταν από τους μαθητές να κατασκευάσουν στον γεωπίνακα ένα σχήμα με εμβαδόν ίσο με μισή τετραγωνική μονάδα, 22 μαθητές κατασκεύασαν ορθά ένα ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδόν μισή τετραγωνική μονάδα. Παρόλα αυτά μία μαθήτρια ενώ φάνηκε να συμφώνησε με τους συμμαθητές της, που βρίσκονταν στην ίδια υπο-ομάδα στην κατασκευή ενός τριγώνου, η ίδια τελικά δε μπόρεσε να μεταφέρει σωστά το σχήμα αυτό στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα στο φύλλο εργασίας της (βλ. Εικόνα 4).

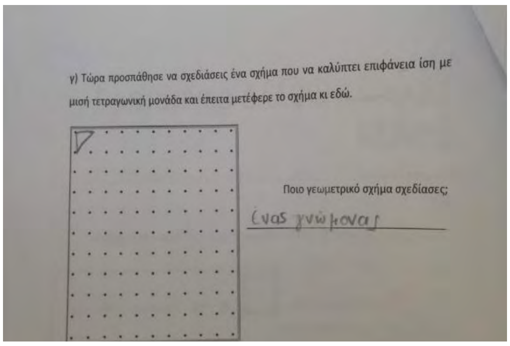


Εικόνα 4. Λάθος απάντηση μαθήτριας στο υπο-ερώτημα γ της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 1

Όσον αφορά την ονομασία των σχημάτων, 12 μαθητές δήλωσαν σωστά ότι σχεδίασαν ένα τρίγωνο. Επίσης άλλοι 5 μαθητές γνώριζαν ότι σχεδίασαν ένα ορθογώνιο τρίγωνο και μία μόνο μαθήτρια δήλωσε ορθά ότι το σχήμα του ανήκει στα ισοσκελή τρίγωνα (βλ. Εικόνα 5). Το πρόβλημα όμως συναντάται σε 4 μαθητές, οι οποίοι ενώ σχεδίασαν ορθογώνιο τρίγωνο, ονόμασαν το γεωμετρικό τους σχήμα «γνώμονα» (βλ. Εικόνα 6).



Εικόνα 5. Σωστή απάντηση μαθήτριας στο υπο-ερώτημα γ της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 1



Εικόνα 6. Λάθος απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα γ της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 1

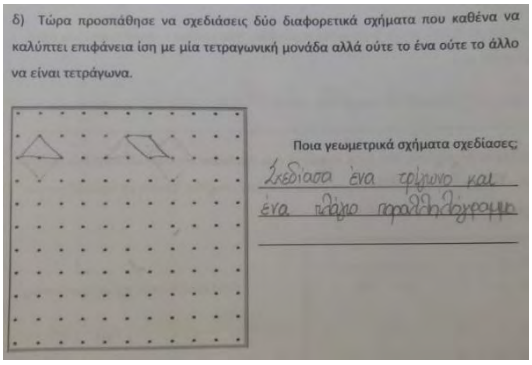
Τέλος, ένας ενδεικτικός διάλογος που έλαβε χώρα στα πλαίσια της εργασίας των μαθητών στο τρίτο υπο-ερώτημα αυτής της δραστηριότητας είναι ο ακόλουθος:

Μ1 : «*Πώς θα σχεδιάσουμε σχήμα με μισή τετραγωνική μονάδα; Δεν κατάλαβα. Αφού εμείς θέλουμε ολόκληρες τετραγωνικές μονάδες.*»

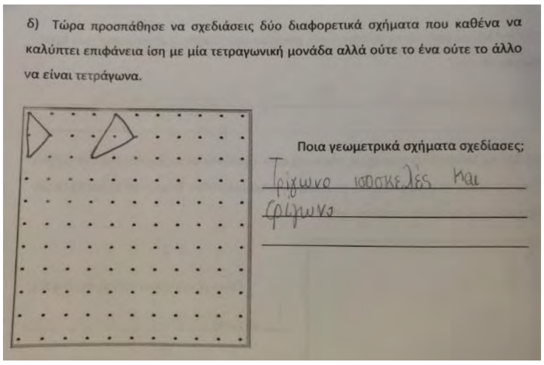
Μ2 : «*Ας κόψουμε το τετράγωνο στη μέση με ένα λαστιχάκι; Φέρε μου ένα λαστιχάκι με άλλο χρώμα. Να! Αν το κόψουμε στη μέση, βγαίνει ένα τριγωνάκι.*»

Στο τέταρτο υπο-ερώτημα της δραστηριότητας 1 του Φύλλου Εργασίας 1, οι μαθητές εργάστηκαν πιο διερευνητικά αφού έπρεπε να σχεδιάσουν δύο διαφορετικά σχήματα που να έχουν εμβαδόν ίσο με μία τετραγωνική μονάδα του γεωπίνακα, αλλά κανένα από αυτά τα σχήματα να μην είναι τετράγωνο. Σε αυτή τη δραστηριότητα, από τους 23 μαθητές που εργάστηκαν, 12 μαθητές κατάφεραν ύστερα από πολλές προσπάθειες κατασκευής σχημάτων στον γεωπίνακα, να σχηματίσουν ένα τρίγωνο και ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο. Τα σχήματα αυτών των 12 μαθητών κρίθηκαν σωστά. Οι υπόλοιποι 11 μαθητές κατάφεραν να σχεδιάσουν μόνο ένα σχήμα, που να έχει επιφάνεια ίση με μία τετραγωνική μονάδα και να μην είναι τετράγωνο. Από αυτούς τους 11 μαθητές, οι 7 μαθητές σχεδίασαν σωστά ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο, ενώ οι υπόλοιποι 4 μαθητές κατάφεραν να σχεδιάσουν σωστά ένα τρίγωνο.

Θα μπορούσαμε να πούμε πως σε αυτή τη δραστηριότητα αρκετοί μαθητές αντιμετώπισαν μεγάλη δυσκολία. Ωστόσο η συνεργασία των μαθητών στα πλαίσια ομάδων και υπο-ομάδων τους βοήθησε ώστε να μοιραστούν μεταξύ τους σκέψεις, να πειραματιστούν από κοινού στον γεωπίνακα και τελικά να εργαστούν σωστά ώστε να σχεδιάσουν τουλάχιστον ένα σχήμα που να υπακούει στους περιορισμούς της δραστηριότητας. Μάλιστα όσον αφορά την ονομασία των σχημάτων παρατηρήθηκε ακόμη μεγαλύτερη δυσκολία. Από τους 14 μαθητές της τάξης οι οποίοι κατάφεραν να σχεδιάσουν σωστά και τα δύο σχήματα, οι 13 μαθητές δήλωσαν ορθά ότι τα σχήματά τους είναι ένα τρίγωνο/ορθογώνιο τρίγωνο και ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο (βλ. Εικόνα 7). Από την άλλη πλευρά, από τους 11 μαθητές οι οποίοι σχεδίασαν σωστά μόνο ένα σχήμα που να έχει εμβαδόν ίσο με μία τετραγωνική μονάδα και να μην τετράγωνο, μόνο 6 μαθητές ονόμασαν σωστά το σχήμα τους (βλ. Εικόνα 8)



Εικόνα 7. Απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα δ της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 1



Εικόνα 8. Απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα δ της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 1

Ο τρόπος που εργάστηκαν οι μαθητές στο υπο-ερώτημα αυτό διαφαίνεται στους παρακάτω διαλόγους:

Διάλογος α':

Μ1 : «*Αν πάρουμε μισή τετραγωνική μονάδα από αυτό το τετραγωνάκι και άλλη μισή τετραγωνική μονάδα από το πάνω τετραγωνάκι, θα έχουμε μία ολόκληρη τετραγωνική μονάδα.*»

Μ2 : «*Ναι! Αλλά μήπως είναι τετράγωνο αυτό το σχήμα;*»

Μ3 : «*Όχι. Είναι σαν λοξό τετράγωνο.»*

Ερευνήτρια: «*Συμφωνείται όλοι;»*

Μ2 : «*Όχι. Δεν υπάρχει τέτοιο σχήμα.*»

Ερευνήτρια: «*Πόσες πλευρές έχει;*»

Μ1 : «*Τέσσερις πλευρές.*»

Ερευνήτρια: «*Παράλληλες πλευρές έχει;*»

Μ3 : «*Ναι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.*»

Ερευνήτρια: «*Άρα πώς θα μπορούσατε να ονομάσετε το σχήμα που κάνατε;*»

Μ2 : «*Μήπως παραλληλόγραμμο;*»

Ερευνήτρια: «*Συμφωνείτε όλοι;*»

Μ3 : «*Ναι. Και αφού γέρνει είναι πλάγιο παραλληλόγραμμο.*»

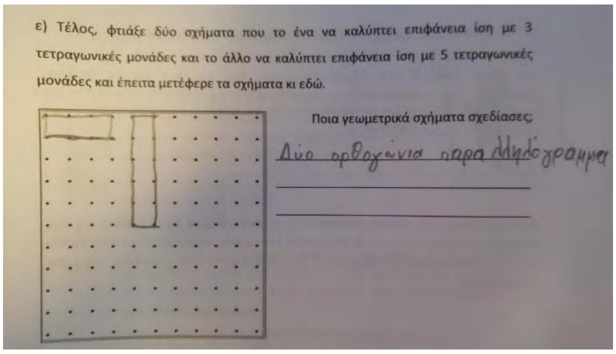
Ερευνήτρια: «*Καλή προσπάθεια!*»

Διάλογος β':

M1 : «*Λέω να κάνουμε ένα τρίγωνο που είναι μισή τετραγωνική μονάδα και να κολλήσουμε από δίπλα ένα ακόμη τρίγωνο που και αυτό είναι μισή τετραγωνική μονάδα…*»

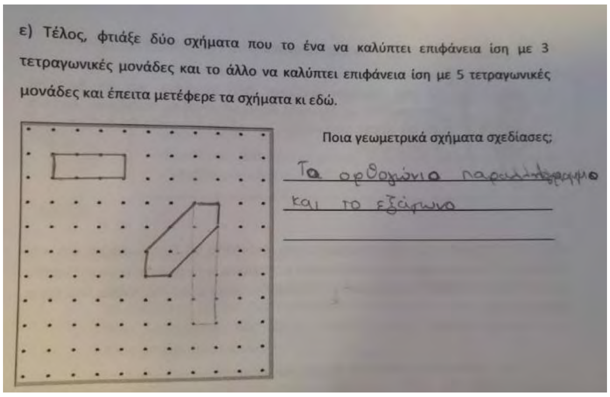
M2 : «*Άρα βγαίνει ένα τρίγωνο με επιφάνεια μία τετραγωνική μονάδα.*»

Κατά το πέμπτο και τελευταίο υπο-ερώτημα της δραστηριότητας 1 του Φύλλου Εργασίας 1, ζητήθηκε από τους μαθητές να σχηματίσουν στο γεωπίνακα δύο σχήματα, τα οποία να καλύπτουν επιφάνεια ίση με 3 και με 5 τετραγωνικές μονάδες αντίστοιχα. Σε αυτή την εργασία, όλες οι ομάδες κατάφεραν να συνεργαστούν και να σχεδιάσουν με ευκολία τα σχήματα που τους ζητούνταν. Ωστόσο ένας μόνο μαθητής δεν μπόρεσε να μεταφέρει σωστά στον πίνακα αναπαράστασης του φύλλου εργασίας του τα σχήματα, που είχε κατασκευάσει στον γεωπίνακα κατόπιν συνεργασίας με τους συμμαθητές του. Συνεπώς από τους 23 μαθητές της τάξης 14 μαθητές σχεδίασαν σωστά δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με επιφάνεια τρεις και πέντε τετραγωνικές μονάδες αντίστοιχα (βλ. Εικόνα 9).



Εικόνα 9. Απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα ε της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 1

Οι υπόλοιποι 8 μαθητές, οι οποίοι φάνηκαν πιο διερευνητικοί σχεδίασαν σωστά ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με επιφάνεια 3 τετραγωνικές μονάδες και ένα πεντάγωνο ή ένα εξάγωνο με επιφάνεια 5 τετραγωνικές μονάδες (βλ. Εικόνα 10). Επιπρόσθετα κανένας μαθητής δε εκδήλωσε κάποια δυσκολία στην προσπάθεια του να αναγνωρίσει και να ονομάσει τα σχήματα που σχεδίασε. Οι παρακάτω διάλογοι, όπως καταγράφηκαν, μπορούν να φανερώσουν



Εικόνα 10. Απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα ε της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 1

τον τρόπο σκέψης και εργασίας κάποιων μαθητών στα πλαίσια αυτού του υπο-ερωτήματος:

Διάλογος α':

Μ1 : «*Ας κάνω εγώ το ένα σχήμα. Φέρε μου ένα λαστιχάκι. Θέλουμε επιφάνεια τρεις τετραγωνικές μονάδες. Άρα μία, δύο, τρεις (ο μαθητής απαριθμεί στον γεωπίνακα τετραγωνικές μονάδες). Να βγαίνει ένα ορθογώνιο.*»

Μ2 : «*Σωστά. Για να κάνω κι εγώ το άλλο σχήμα. Τώρα θέλουμε πέντε τετραγωνικές μονάδες. Μία, δύο, τρεις, τέσσερις, πέντε (ο μαθητής απαριθμεί στον γεωπίνακα τετραγωνικές μονάδες). Πολύ εύκολα βγαίνει άλλο ένα ορθογώνιο με πέντε τετραγωνικές μονάδες.*»

Διάλογος β':

Μ1 : «*Με τρεις τετραγωνικές μονάδες βγαίνει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Για να δούμε τώρα όμως τι σχήμα θα κάνουμε με πέντε τετραγωνικές μονάδες;*»

Μ2 : «*Σίγουρα βγαίνει πάλι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.*»

Μ1 : «*Καλά, αλλά μήπως να προσπαθούσαμε να κάνουμε κανένα διαφορετικό σχήμα;*»

Μ3 : «*Ναι. Καλύτερα ας προσπαθήσουμε ένα διαφορετικό σχήμα.»*

Μ2 : «*Οκ. Αν μετρήσουμε τέσσερις τετραγωνικές μονάδες (οι μαθητές σχηματίζουν ένα τετράγωνο στον γεωπίνακα με επιφάνεια τέσσερις τετραγωνικές μονάδες) και μία ακόμα τετραγωνική μονάδα από πάνω, βγαίνουν πέντε τετραγωνικές μονάδες. Αλλά δεν υπάρχει τέτοιο γεωμετρικό σχήμα.»*

Μ3 : «*Κυρία, μπορεί να βγει κάποιο άλλο γεωμετρικό σχήμα με πέντε τετραγωνικές μονάδες εκτός από ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;*»

Ερευνήτρια: «*Ναι. Για προσπαθήστε περισσότερο.*»

Μ1 : «*Το βρήκα. Ας σκεφτούμε με μισές τετραγωνικές μονάδες, όπως κάναμε στο προηγούμενο υπο-ερώτημα. Αν σχηματίσουμε ένα τετράγωνο με τέσσερις τετραγωνικές μονάδες και από πάνω να κολλήσουμε ένα τρίγωνο με μία τετραγωνική μονάδα;*»

Μ2 : «*Τώρα βγαίνει ένα σπιτάκι (ο μαθητής αναφέρει τι του θυμίζει το σχήμα). Μήπως είναι ένα τραπέζιο;*»

M$_3$: «*Μα το τραπέζιο έχει τέσσερις πλευρές και τέσσερις γωνίες. Δεν είναι τραπέζιο.*»

M$_2$: «*Κάτσε να μετρήσουμε πόσες πλευρές και πόσες γωνίες έχει αυτό (ο μαθητής μετράει τις πλευρές και τις γωνίες του σχήματος που σχεδίασαν). Λοιπόν έχει πέντε πλευρές και πέντε γωνίες.*»

M$_1$: «*Το βρήκα! Τότε είναι πεντάγωνο.*»

M$_3$: «*Κυρία, αυτό το σχήμα είναι πεντάγωνο;*»

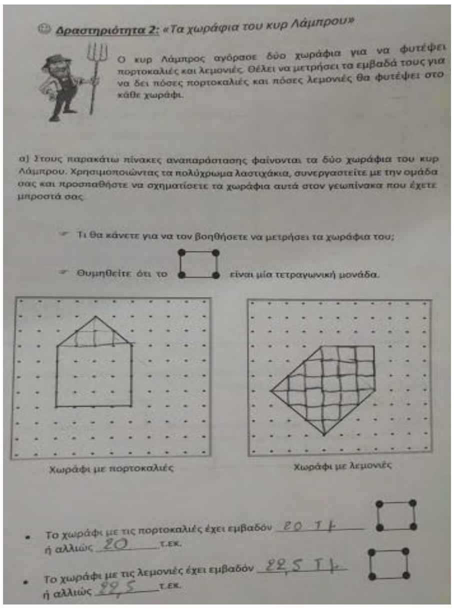
Ερευνήτρια: «*Σωστή η σκέψη σας. Μπράβο! Συνεργαστήκατε πολύ καλά!*»

Δραστηριότητα 2η: «Τα χωράφια του κυρ Λάμπρου»

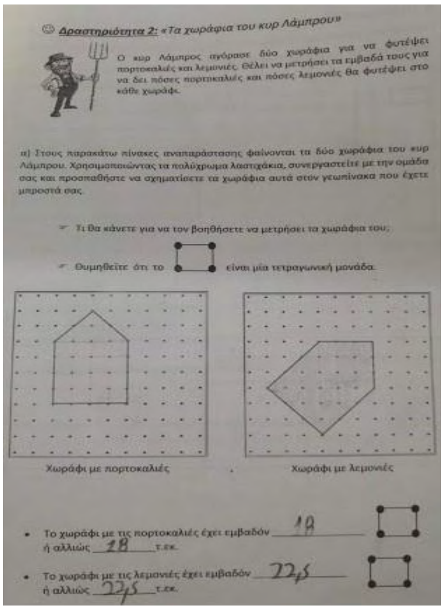
Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι προτού οι μαθητές προχωρήσουν στη δεύτερη δραστηριότητα του Φύλλου Εργασίας 1, η ερευνήτρια – εκπαιδευτικός παρενέβη με σκοπό να διευκρινίσει στους μαθητές ότι η απόσταση της μίας κουκίδας από την άλλη στον γεωπίνακα που έχουν στη διάθεσή τους είναι 1 εκατοστό. Η ερευνήτρια επιδίωξε με αυτόν τον τρόπο να παρακινήσει τους μαθητές ώστε να εκτελέσουν μετατροπή ανάμεσα σε δύο μονάδες μέτρησης, δηλαδή από τη τετραγωνική μονάδα στο τετραγωνικό εκατοστό καθώς με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές θα μπορέσουν να συσχετίσουν έμμεσα την επιφάνεια της τετραγωνικής μονάδας του γεωπίνακα με την μονάδα μέτρησης του εμβαδού (δηλ. το τετραγωνικό εκατοστό). Κάτι τέτοιο φυσικά μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της μονάδας μέτρησης του εμβαδού και να συνειδητοποιήσουν ότι μπορούν να χρησιμοποιούν αυθαίρετες μονάδες μέτρησης για τη μέτρηση του εμβαδού επίπεδων σχημάτων.

Προχωρώντας λοιπόν στα πλαίσια της δραστηριότητας 2 του Φύλλου Εργασίας 1, δίνονταν στους μαθητές δύο γεωμετρικά σχήματα, τα οποία έπρεπε να μεταφέρουν και στον γεωπίνακα που τους είχε δοθεί, με σκοπό να υπολογίσουν τα εμβαδά αυτών των σχημάτων. Οι μαθητές υπολόγισαν το εμβαδόν αυτών των σχημάτων χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης την τετραγωνική μονάδα του γεωπίνακα και στη συνέχεια πραγματοποίησαν και μετατροπές από την μη τυπική μονάδα μέτρησης (δηλ. την τετραγωνική μονάδα) στην τυπική μονάδα μέτρησης του εμβαδού (δηλ. το τετραγωνικό εκατοστό).

Από τους 23 μαθητές που εργάστηκαν σε αυτή τη δραστηριότητα, 14 μαθητές συνεργάστηκαν και υπολόγισαν σωστά τα εμβαδά των δύο σχημάτων (βλ. Εικόνα 11).



Εικόνα 11. Σωστή απάντηση μαθητή στη δραστηριότητα 2, του Φύλλου Εργασίας 1



Εικόνα 12. Λανθασμένη απάντηση μαθητή στη δραστηριότητα 2, του Φύλλου Εργασίας 1

Οι υπόλοιποι 9 μαθητές δυσκολεύτηκαν στον υπολογισμό του εμβαδού του ενός ή και των δύο σχημάτων (βλ. Εικόνα 12). Πιο συγκεκριμένα οι περισσότεροι μαθητές φάνηκε ότι δυσκολεύτηκαν στον υπολογισμό των μισών τετραγωνικών μονάδων που κάλυπταν τα συγκεκριμένα σχήματα και περιορίστηκαν στο να υπολογίζουν μόνο τις ολόκληρες τετραγωνικές μονάδες που κάλυπταν τα σχήματα αυτά. Μάλιστα σημαντική δυσκολία από πολλούς μαθητές παρατηρήθηκε και στη μεταφορά επί του γεωπίνακα του δεύτερου σχήματος, το οποίο αντιστοιχούσε στο χωράφι με τις λεμονιές, σύμφωνα με τα δεδομένα της συγκεκριμένης δραστηριότητας (βλ. Παράρτημα). Εντούτοις, όλοι οι μαθητές συνειδητοποίησαν την αντιστοιχία ανάμεσα στην μη τυπική μονάδα μέτρησης (δηλ. την τετραγωνική μονάδα) και την τυπική μονάδα μέτρησης του εμβαδού (δηλ. το τετραγωνικό εκατοστό) και μπόρεσαν να κάνουν σωστά τις μετατροπές από τη μία μονάδα μέτρησης στην άλλη.

Με βάση λοιπόν το διάλογο που ακολουθεί μπορούμε να παρακολουθήσουμε τον τρόπο εργασίας των μαθητών στη συγκεκριμένη δραστηριότητα:

Μ$_1$: «*Ας πάρουμε λαστιχάκια με διαφορετικά χρώματα για να χωρίσουμε το σχήμα σε μικρότερα μέρη και να μπορέσουμε να υπολογίσουμε πιο εύκολα τις τετραγωνικές μονάδες που καλύπτει.*»

Μ$_2$: «*Ωραία. Κάθε τετραγωνάκι είναι μία τετραγωνική μονάδα. Σωστά;*»

M$_1$: «*Ναι.*»

M$_2$: «*Άρα να υπολογίσουμε πρώτα το εμβαδόν αυτού του κομματιού. Κάτσε να μετρήσουμε τα τετραγωνάκια (δηλ. τις τετραγωνικές μονάδες)…*»

M$_1$: «*Μισό λεπτό. Κοίτα αυτό το κομμάτι είναι ένα μεγάλο τετράγωνο άρα αφού σε κάθε πλευρά έχει 1,2,3,4 τετραγωνικές μονάδες, δε χρειάζεται να μετρήσουμε μία-μία όλες τις τετραγωνικές μονάδες. Θα κάνουμε πολύ απλά 4x4.*»

M$_2$: «*Ωραία. Άρα σε αυτό το κομμάτι έχουμε 16 τετραγωνικές μονάδες. Πάμε τώρα στο πάνω μέρος του σχήματος. Εδώ έχουμε άλλα 2 τετραγωνάκια. Άρα όλα μαζί 18 τετραγωνικές μονάδες. Σωστά;*»

M$_1$: «*Ωραία. Αλλά τα υπόλοιπα κομματάκια που περισσεύουν δε θα τα υπολογίσουμε;*»

M$_2$: «*Κυρία εσείς τι λέτε;*»

Ερευνήτρια: «*Βλέπω ότι δεν έχετε υπολογίσει όλη την επιφάνεια που καλύπτει το σχήμα σας.*»

M$_1$: «*Οκ. Τότε θα μετρήσουμε και τα τριγωνάκια που περισσεύουν.*»

M$_2$: «*Λοιπόν μισό και μισό μας κάνουν μία ολόκληρη τετραγωνική μονάδα. Άρα 19 τετραγωνικές μονάδες μέχρι στιγμής.*»

M$_1$: «*Και άλλα δύο μισά, 20 τετραγωνικές μονάδες συνολικά.*»

M$_2$: «*Εντάξει. Πάμε τώρα να κάνουμε το άλλο σχήμα.*»

M$_1$: «*Κάτσε να δούμε προσεχτικά ποιες κουκίδες ακουμπά αυτό το σχήμα στο χαρτί, για να μπορέσουμε να το κάνουμε και στον γεωπίνακα γιατί αλλιώς θα μπερδευτούμε.*»

M$_2$: «*Σωστά. Τώρα να χωρίσουμε με τα λαστιχάκια τα μικρά τετραγωνάκια (δηλ. τις τετραγωνικές μονάδες) για να μπορέσουμε να τις μετρήσουμε καλύτερα.*»

M$_1$: «*Άρα 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18 (ο μαθητής απαριθμεί τις τετραγωνικές μονάδες)*»

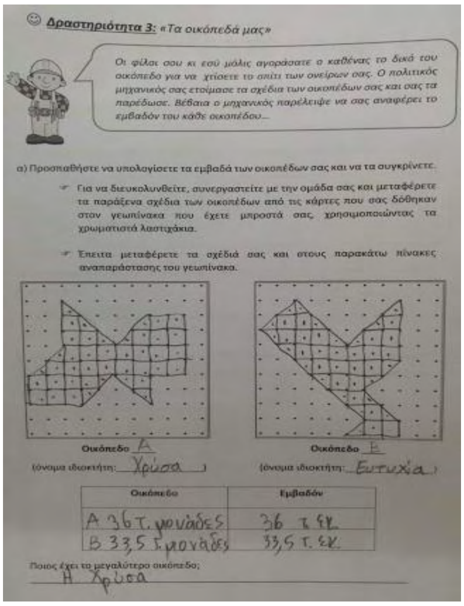
M$_2$: «*Να μετρήσω κι εγώ τα μισά. Βγάζουν άλλες 4,5 τετραγωνικές μονάδες.*»

M$_1$: «*Συνολικά 18 και 4,5 μας κάνουν 22,5 τετραγωνικές μονάδες.*»

<u>Δραστηριότητα 3η: «Τα οικόπεδά μας»</u>

Κατά την τρίτη και τελευταία δραστηριότητα του Φύλλου Εργασίας 1 δόθηκαν στους μαθητές κάρτες μοτίβων με διάφορα σχέδια οικοπέδων (βλ. Παράρτημα). Οι μαθητές έπρεπε να μεταφέρουν τα σχήματα αυτών των οικοπέδων από τις κάρτες στον γεωπίνακα χρησιμοποιώντας τα λαστιχάκια και κατόπιν στον πίνακα αναπαράστασης που υπήρχε στο φύλλο εργασίας τους. Απώτερος στόχος της δραστηριότητας αυτής ήταν να υπολογίσουν οι μαθητές τα εμβαδά αυτών των σχημάτων και να τα συγκρίνουν. Σε αυτήν την περίπτωση, οι μαθητές εξασκήθηκαν στην ανάλυση ενός γεωμετρικού σχήματος σε δύο ή περισσότερα σχήματα ώστε να υπολογίσουν το εμβαδόν του αρχικού σχήματος.

Σε αυτή τη δραστηριότητα 13 μαθητές, οι οποίοι σχημάτισαν μεταξύ τους 6 υπο-ομάδες, συνεργάστηκαν και κατάφεραν να μεταφέρουν σωστά τα σχήματα των οικοπέδων που τους είχαν δοθεί τόσο στον γεωπίνακα όσο και στον πίνακα αναπαράστασης του φύλλου εργασίας αλλά και να υπολογίσουν σωστά το εμβαδόν αυτών των σχημάτων, επιμερίζοντας τα σχήματα αυτά και μετρώντας προσεκτικά τις τετραγωνικές μονάδες που κάλυπταν (βλ. Εικόνα 13).


Δραστηριότητα 3: «Τα οικόπεδά μας»

Οι φίλοι σου κι εσύ μόλις αγοράσατε ο καθένας το δικό του οικόπεδο για να χτίσετε το σπίτι των ονείρων σας. Ο πολιτικός μηχανικός σας ετοίμασε τα σχέδια των οικοπέδων σας και σας τα παρέδωσε. Βέβαια ο μηχανικός παρέλειψε να σας αναφέρει το εμβαδόν του κάθε οικοπέδου...

α) Προσπαθήστε να υπολογίσετε τα εμβαδά των οικοπέδων σας και να τα συγκρίνετε.

- Για να διευκολυνθείτε, συνεργαστείτε με την ομάδα σας και μεταφέρετε τα παράξενα σχέδια των οικοπέδων από τις κάρτες που σας δόθηκαν στον γεωπίνακα που έχετε μπροστά σας, χρησιμοποιώντας τα χρωματιστά λαστιχάκια.
- Έπειτα μεταφέρετε τα σχέδιά σας και στους παρακάτω πίνακες αναπαράστασης του γεωπίνακα.

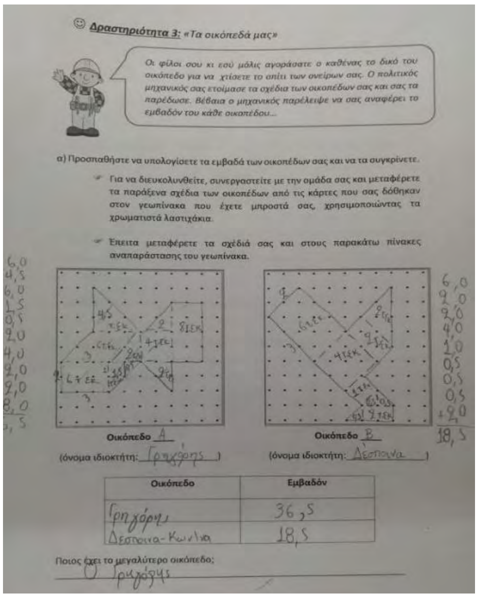
Οικόπεδο A (όνομα ιδιοκτήτη: Χρύσα)

Οικόπεδο Β (όνομα ιδιοκτήτη: Ευτυχία)

Οικόπεδο	Εμβαδόν
A 36 τ. μονάδες	36 τ. εκ.
B 33,5 τ. μονάδες	33,5 τ. εκ.

Ποιος έχει το μεγαλύτερο οικόπεδο;
Η Χρύσα

Εικόνα 13. Σωστός υπολογισμός εμβαδού από μαθητές στη δραστηριότητα 3, του Φύλλου Εργασίας 1


Δραστηριότητα 3: «Τα οικόπεδά μας»

Οι φίλοι σου κι εσύ μόλις αγοράσατε ο καθένας το δικό του οικόπεδο για να χτίσετε το σπίτι των ονείρων σας. Ο πολιτικός μηχανικός σας ετοίμασε τα σχέδια των οικοπέδων σας και σας τα παρέδωσε. Βέβαια ο μηχανικός παρέλειψε να σας αναφέρει το εμβαδόν του κάθε οικοπέδου...

α) Προσπαθήστε να υπολογίσετε τα εμβαδά των οικοπέδων σας και να τα συγκρίνετε.

- Για να διευκολυνθείτε, συνεργαστείτε με την ομάδα σας και μεταφέρετε τα παράξενα σχέδια των οικοπέδων από τις κάρτες που σας δόθηκαν στον γεωπίνακα που έχετε μπροστά σας, χρησιμοποιώντας τα χρωματιστά λαστιχάκια.
- Έπειτα μεταφέρετε τα σχέδιά σας και στους παρακάτω πίνακες αναπαράστασης του γεωπίνακα.

Οικόπεδο A (όνομα ιδιοκτήτη: Γρηγόρης)

Οικόπεδο Β (όνομα ιδιοκτήτη: Δέσποινα)

Οικόπεδο	Εμβαδόν
Γρηγόρης	36,5
Δέσποινα-Κωνίια	18,5

Ποιος έχει το μεγαλύτερο οικόπεδο;
Ο Γρηγόρης

Εικόνα 14. Λανθασμένος υπολογισμός εμβαδού από μαθητές στη δραστηριότητα 3, του Φύλλου Εργασίας 1

Από την άλλη πλευρά, 10 μαθητές ή αλλιώς 4 υπο-ομάδες παρόλο που μετέφεραν σωστά τα σχήματα των οικοπέδων που τους είχαν δοθεί τόσο στον γεωπίνακα όσο και στον πίνακα αναπαράστασης του φύλλου εργασίας, δυσκολεύτηκαν αρκετά στην ανάλυση των σχημάτων τους ώστε να μπορέσουν να υπολογίσουν σωστά τις τετραγωνικές μονάδες που αυτά κάλυπταν (βλ. Εικόνα 14).

Παρακάτω παρατίθεται ένας διάλογος που έλαβε χώρα μεταξύ κάποιων μαθητών κατά την εργασία τους στη συγκεκριμένη δραστηριότητα:

M_1 : «*Κάτσε να προσπαθήσουμε πρώτα να σχεδιάσουμε το δικό σας οικόπεδο στον γεωπίνακα. (Ο μαθητής δοκιμάζει να σχεδιάσει το οικόπεδο των συμμαθητών του στο γεωπίνακα.)*»

M_2 : «*Δε μου φαίνεται ότι το σχέδιο βγήκε όπως στο χαρτί. Κάτι έχουμε κάνει λάθος. Καλύτερα να μετρήσουμε σε ποιες κουκίδες ακουμπά ακριβώς το σχήμα για να μπορούμε να το βγάλουμε ίδιο. (Οι μαθητές παρατηρούν το χαρτί που τους έχει δοθεί και αναπαριστά το σχέδιο του οικοπέδου στο γεωπίνακα για να δουν σε ποιες κουκίδες ακουμπά το περίγραμμα του οικοπέδου.)*»

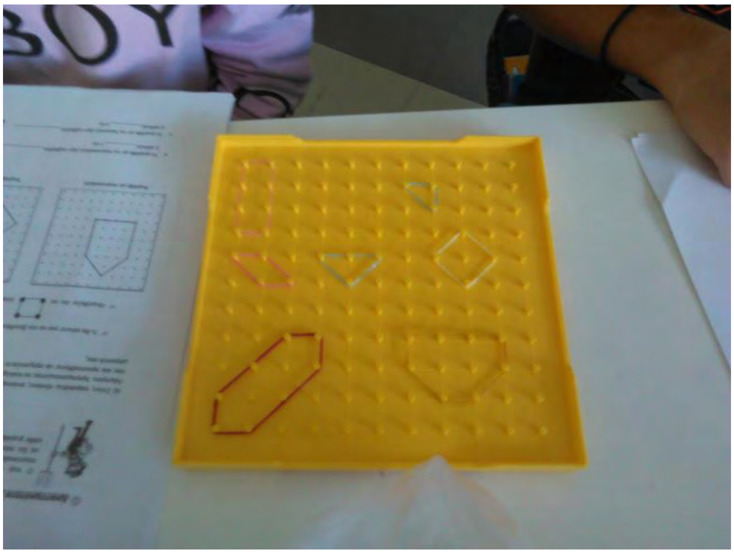
M_3 : «*Τώρα μήπως καλύτερα να σχεδιάσουμε μέσα στο οικόπεδο μικρότερα σχήματα για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του πιο εύκολα;*»

M_1 : «*Καλή ιδέα! Ας το χωρίσουμε σε τετράγωνα και τρίγωνα. (Οι μαθητές επιμερίζουν το σχήμα σε μικρότερα σχήματα με τα λαστιχάκια και υπολογίζουν το εμβαδόν του.)*»

Στη συνέχεια ακολουθεί φωτογραφικό υλικό, το οποίο λήφθηκε κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης και ενόσω οι μαθητές συνεργάζονταν και δραστηριοποιούνταν πάνω στις δραστηριότητες του πρώτου φύλλου εργασίας.

<u>Δραστηριότητα 1η: «Καλύπτοντας επιφάνειες στον γεωπίνακα»</u>

Εικόνα 1

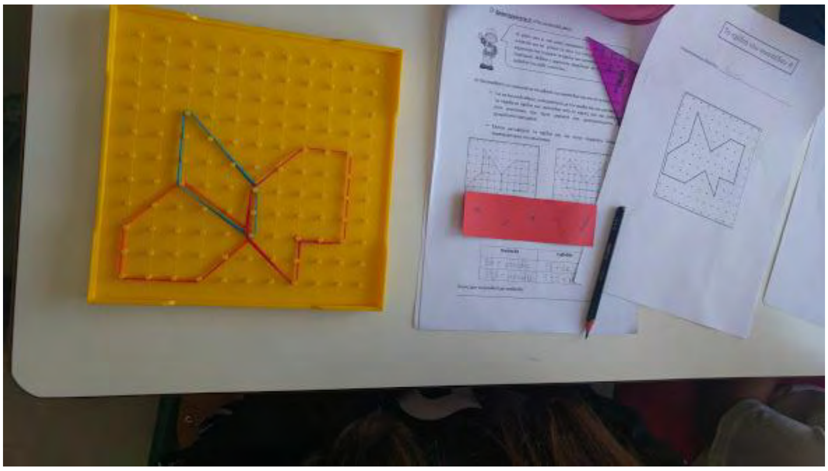


Εικόνα 2

Δραστηριότητα 2η: «Τα χωράφια του κυρ Λάμπρου»

Εικόνα 3

Δραστηριότητα 3η: «Τα οικόπεδά μας»



Εικόνα 4

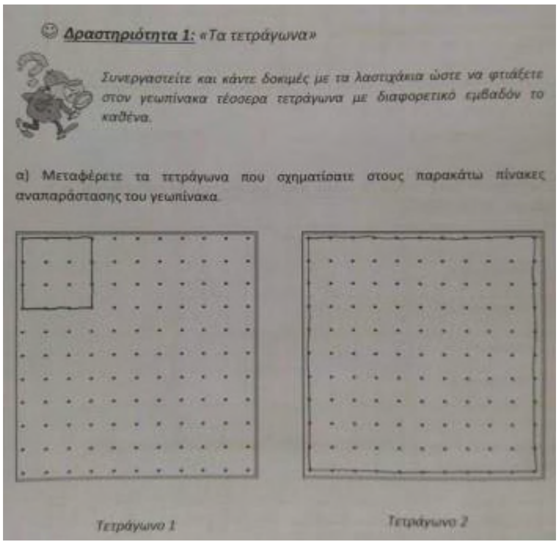
Εικόνα 5

5.3.2 Δεύτερο φύλλο εργασίας

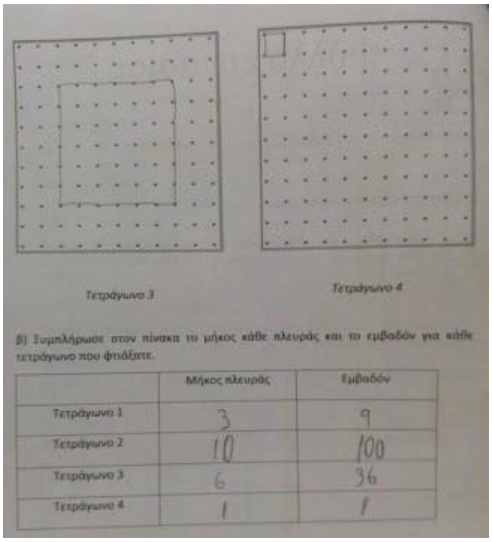
<u>Δραστηριότητα 1η: «Τα τετράγωνα»</u>

Κατά την πρώτη δραστηριότητα του Φύλλου Εργασίας 2 (βλ. Παράρτημα), οι μαθητές εργάστηκαν περισσότερο αυτόνομα, καθώς είχαν πλέον εξοικειωθεί με τη χρήση του γεωπίνακα και κατ' επέκταση λάμβαναν λιγότερη καθοδήγηση από την δασκάλα-ερευνήτρια.

Στο πρώτο υπο-ερώτημα αυτής της δραστηριότητας ζητούνταν από τους μαθητές να συνεργαστούν στις υπο-ομάδες τους με σκοπό να σχεδιάσουν στον γεωπίνακα τέσσερα τετράγωνα με διαφορετικό εμβαδόν το καθένα και έπειτα να μεταφέρουν αυτά τα σχήματα στους πίνακες αναπαράστασης του γεωπίνακα που υπήρχαν στα φύλλα εργασίας τους. Από τους 23 μαθητές που εργάστηκαν σε αυτό το υπο-ερώτημα της δραστηριότητας 1, οι 21 μαθητές σχεδίασαν σωστά τέσσερα τετράγωνα με διαφορετικό εμβαδόν το καθένα (βλ. Εικόνα 1 και Εικόνα 2).

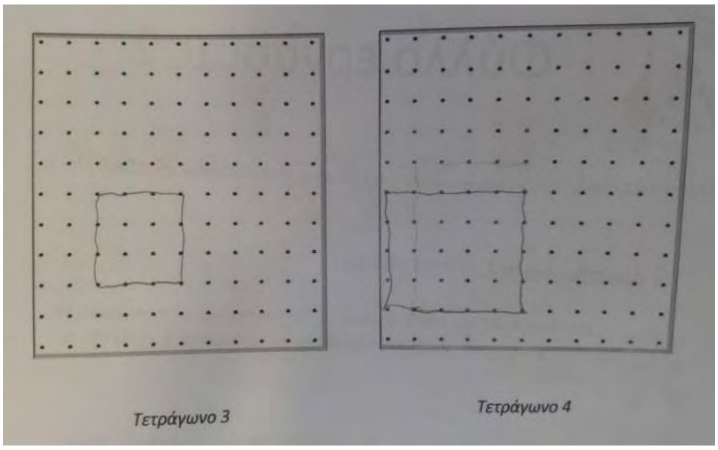


Εικόνα 1. Σωστή απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα α της δραστηριότητα 1, του Φύλλου Εργασίας 2



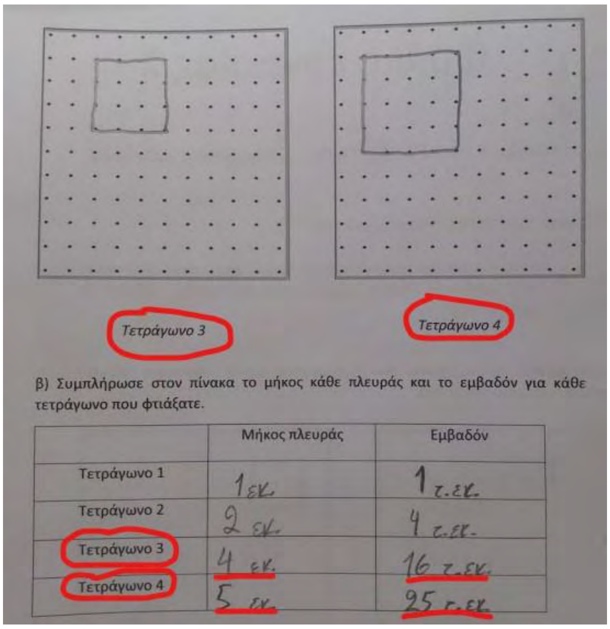
Εικόνα 2. Συνέχεια της απάντησης μαθητή στο υπο-ερώτημα α της δραστηριότητα 1, του Φύλλου Εργασίας 2

Ωστόσο υπήρξαν και 2 μαθητές, οι οποίοι ενώ φάνηκε να συμφώνησαν με τους συμμαθητές τους, που βρίσκονταν στην ίδια υπο-ομάδα για την κατασκευή τετραγώνων με συγκεκριμένη επιφάνεια, τελικά δεν κατάφεραν να μεταφέρουν σωστά στους πίνακες αναπαράστασης του φύλλου εργασίας τα τετράγωνα που είχαν σχηματίσει με τους συμμαθητές τους στον γεωπίνακα. Πιο συγκεκριμένα οι εν λόγω μαθητές τελικά σχεδίασαν ορθογώνια παραλληλόγραμμα και όχι τετράγωνα (βλ. Εικόνα 3).



Εικόνα 3. Λανθασμένη απάντηση μαθητή στην περίπτωση του *Τετραγώνου 4*, στο υπο-ερώτημα α της δραστηριότητα 1, του Φύλλου Εργασίας 2

Κατά το δεύτερο υπο-ερώτημα της δραστηριότητας 1 του Φύλλου Εργασίας 2, οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν και να καταγράψουν στο φύλλο εργασίας τους το μήκος της πλευράς και το εμβαδόν του κάθε τετραγώνου που σχεδίασαν κατά το πρώτο υπο-ερώτημα αυτής της δραστηριότητας. Όπως διαπιστώσαμε 16 μαθητές υπολόγισαν και κατέγραψαν σωστά τα μήκη των πλευρών και τα εμβαδά και των τεσσάρων τετραγώνων που σχεδίασαν στο πρώτο υπο-ερώτημα. Από την άλλη πλευρά, το πρόβλημα διαπιστώθηκε σε 7 περιπτώσεις μαθητών, οι οποίοι υπολόγισαν λανθασμένα τα μήκη των πλευρών και τα εμβαδά κάποιων τετραγώνων που είχαν σχεδιάσει. Πιο συγκεκριμένα, τα μήκη των πλευρών και τα εμβαδά που κατέγραψαν δεν αντιστοιχούσαν στα τετράγωνα που είχαν σχεδιάσει (βλ. Εικόνα 4).



Τετράγωνο 3

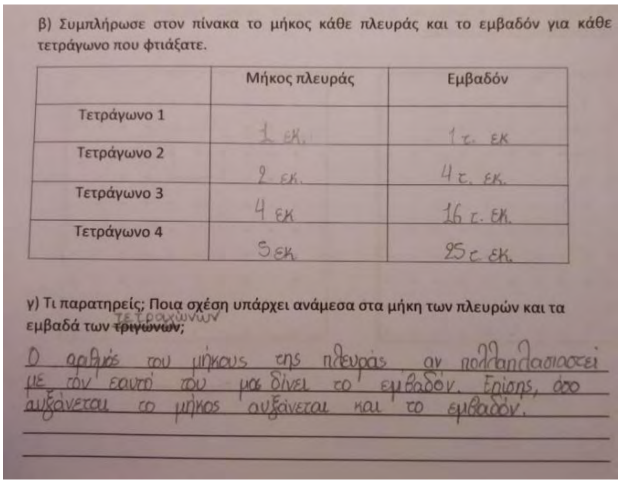
Τετράγωνο 4

β) Συμπλήρωσε στον πίνακα το μήκος κάθε πλευράς και το εμβαδόν για κάθε τετράγωνο που φτιάξατε.

	Μήκος πλευράς	Εμβαδόν
Τετράγωνο 1	1 εκ.	1 τ.εκ.
Τετράγωνο 2	2 εκ.	4 τ.εκ.
Τετράγωνο 3	4 εκ.	16 τ.εκ.
Τετράγωνο 4	5 εκ.	25 τ.εκ.

Εικόνα 4. Λανθασμένη απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα β της δραστηριότητα 1, του Φύλλου Εργασίας 2

Στο τρίτο και τελευταίο υπο-ερώτημα της δραστηριότητας 1 του Φύλλου Εργασίας 2, ζητήθηκε από τους μαθητές να παρατηρήσουν τον πίνακα του υπο-ερωτήματος β με τις μετρήσεις των μηκών και των εμβαδών των τετραγώνων που είχαν σχεδιάσει στο υπο-ερώτημα α αυτής της δραστηριότητας με σκοπό να απαντήσουν στο ερώτημα «Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στα μήκη των πλευρών και τα εμβαδά των τετραγώνων;». Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημάνουμε ότι από τους 23 μαθητές που συμμετείχαν στη δραστηριότητα αυτή, οι 14 μαθητές οδηγήθηκαν στο εξής συμπέρασμα: «*Εάν πολλαπλασιάσουμε το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου επί το μήκος της πλευράς του τότε μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν του τετραγώνου. Επίσης το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου και το εμβαδόν του είναι ανάλογα ποσά, δηλαδή όσο αυξάνεται το ένα, αυξάνεται και το άλλο*» (βλ. Εικόνα 5).



β) Συμπλήρωσε στον πίνακα το μήκος κάθε πλευράς και το εμβαδόν για κάθε τετράγωνο που φτιάξατε.

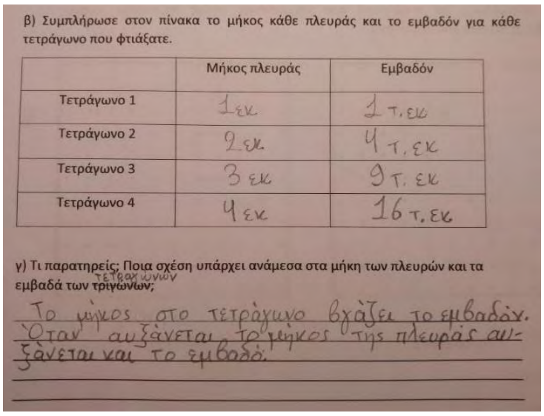
	Μήκος πλευράς	Εμβαδόν
Τετράγωνο 1	1 εκ.	1 τ. εκ
Τετράγωνο 2	2 εκ.	4 τ. εκ.
Τετράγωνο 3	4 εκ	16 τ. εκ.
Τετράγωνο 4	5 εκ	25 τ. εκ.

γ) Τι παρατηρείς; Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στα μήκη των πλευρών και τα εμβαδά των ~~τριγώνων~~ τετραγώνων;

Ο αριθμός του μήκους της πλευράς αν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του μας δίνει το εμβαδόν. Επίσης, όσο αυξάνεται το μήκος αυξάνεται και το εμβαδόν.

Εικόνα 5. Απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα γ της δραστηριότητα 1, του Φύλλου Εργασίας 2

Άλλοι 6 μαθητές διαπίστωσαν ότι «*Εάν γνωρίζω το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου μπορώ να γνωρίζω και το εμβαδόν του. Όπως επίσης το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου και το εμβαδόν του είναι ανάλογα ποσά, δηλαδή όσο αυξάνεται το ένα, αυξάνεται και το άλλο*» (βλ. Εικόνα 6). Ενώ τέλος 3 μαθητές συμπέραναν απλώς ότι «*Το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου και το εμβαδόν του είναι ανάλογα ποσά, δηλαδή όσο αυξάνεται το ένα, αυξάνεται και το άλλο*» (βλ. Εικόνα 7).



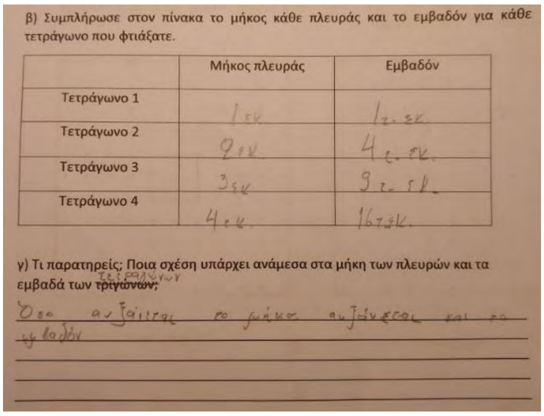
β) Συμπλήρωσε στον πίνακα το μήκος κάθε πλευράς και το εμβαδόν για κάθε τετράγωνο που φτιάξατε.

	Μήκος πλευράς	Εμβαδόν
Τετράγωνο 1	1 εκ	1 τ. εκ
Τετράγωνο 2	2 εκ	4 τ. εκ
Τετράγωνο 3	3 εκ	9 τ. εκ
Τετράγωνο 4	4 εκ	16 τ. εκ

γ) Τι παρατηρείς; Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στα μήκη των πλευρών και τα εμβαδά των ~~τριγώνων~~ τετραγώνων;

Το μήκος στο τετράγωνο βγάζει το εμβαδόν. Όταν αυξάνεται το μήκος της πλευράς αυ-ξάνεται και το εμβαδό.

Εικόνα 6. Απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα γ της δραστηριότητα 1, του Φύλλου Εργασίας 2



β) Συμπλήρωσε στον πίνακα το μήκος κάθε πλευράς και το εμβαδόν για κάθε τετράγωνο που φτιάξατε.

	Μήκος πλευράς	Εμβαδόν
Τετράγωνο 1	1 εκ.	1 τ. εκ.
Τετράγωνο 2	2 εκ.	4 τ. εκ.
Τετράγωνο 3	3 εκ	9 τ. εκ.
Τετράγωνο 4	4 εκ.	16 τ. εκ.

γ) Τι παρατηρείς; Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στα μήκη των πλευρών και τα εμβαδά των ~~τριγώνων~~ τετραγώνων;

Όσο αυξάνεται το μήκος αυξάνεται και το εμβαδόν

Εικόνα 7. Απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα γ της δραστηριότητα 1, του Φύλλου Εργασίας 2

Όλοι οι μαθητές οδηγήθηκαν σε ορθά συμπεράσματα. Ωστόσο στην πρώτη περίπτωση των 14 μαθητών και στη δεύτερη περίπτωση των 6 μαθητών τα συμπεράσματα που καταγράφθηκαν κρίνονται πιο ολοκληρωμένα, καθώς διαπιστώνεται μέσω των συγκεκριμένων συμπερασμάτων πως οι συγκεκριμένοι μαθητές κατάφεραν να εντοπίσουν το μοτίβο πίσω από τη σχέση μήκους πλευράς και εμβαδού τετραγώνου και με αυτόν τρόπο οδηγήθηκαν έμμεσα στον μαθηματικό τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού του τετραγώνου διακρίνοντας τους μαθηματικούς όρους που εμπλέκονται σε αυτόν τον μαθηματικό τύπο.

Ο παρακάτω διάλογος παρουσιάζει τον τρόπο σκέψης των μαθητών γύρω από την εξαγωγή συμπερασμάτων που αφορούν τη σχέση ανάμεσα στα μήκη των πλευρών και τα εμβαδά των τετραγώνων για το υπο-ερώτημα αυτό:

Μ1 : «*Τι σχέση υπάρχει άραγε ανάμεσα στο μήκος της πλευράς και το εμβαδόν του τετραγώνου;*»

Μ2 : «*Το εμβαδόν είναι το διπλάσιο του μήκους;*»

Μ3 : «*Όχι, γιατί δεν πολλαπλασιάζουμε το μήκος επί 2 για να βρούμε το εμβαδόν. Άρα το εμβαδόν δεν είναι το διπλάσιο.*»

Μ1 : «*Σωστά. Για να βρούμε πολλαπλασιάζουμε μήκος επί μήκος και βρίσκουμε το εμβαδόν.*»

Μ3 : «*Άρα το μήκος της πλευράς του τετραγώνου είναι η τετραγωνική ρίζα του εμβαδού.*»

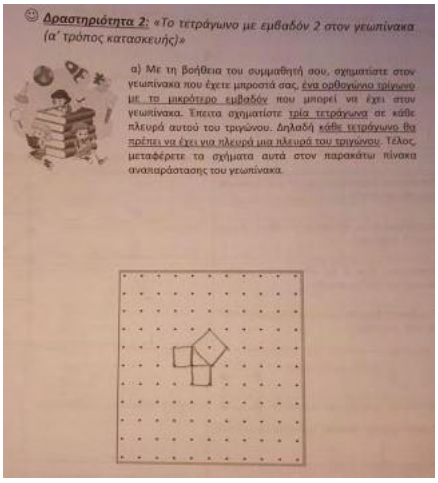
Μ2 : «*Άρα μπορούμε να γράψουμε το συμπέρασμα ότι εάν πολλαπλασιάσουμε το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου επί τον εαυτό του, τότε μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν του.*»

Μ1 : «*Ωραία. Επίσης από το πινακάκι φαίνεται πως όσο αυξάνεται το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου, τόσο αυξάνεται και το εμβαδόν του τετραγώνου.*»

Μ3 : «*Σωστό και αυτό. Οπότε ας γράψουμε και αυτό ως συμπέρασμα.*»

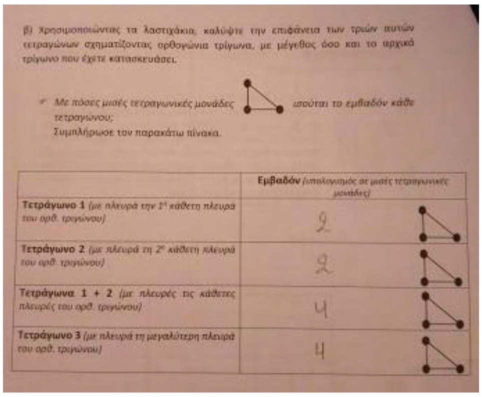
Δραστηριότητα 2η: «Το τετράγωνο με εμβαδόν 2 στον γεωπίνακα (α’ τρόπος κατασκευής)»

Στη δεύτερη δραστηριότητα του Φύλλου Εργασίας 2 (βλ. Παράρτημα), οι μαθητές μέσω της καθοδήγησης του εκπαιδευτικού κατασκευάζουν το γνωστό σχήμα της «καρέκλας της νύφης» και εφαρμόζουν υποσυνείδητα την απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος με σκοπό να ανακαλύψουν σταδιακά τον τρόπο κατασκευής του τετραγώνου με εμβαδόν 2 τετραγωνικά εκατοστά/τετραγωνικές μονάδες.



Εικόνα 8. Απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα α της δραστηριότητα 2, του Φύλλου Εργασίας 2

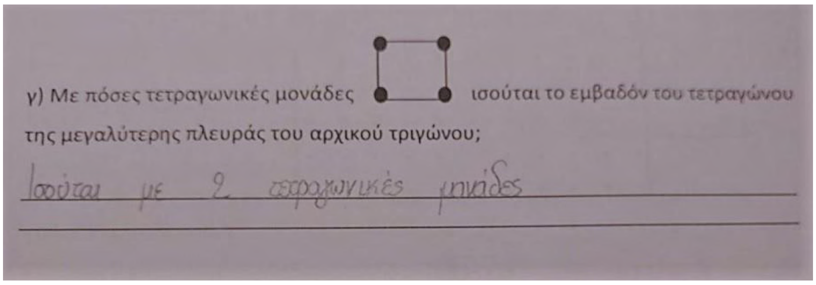
Κατά το πρώτο υπο-ερώτημα της δραστηριότητας αυτής όλοι οι μαθητές ακολουθώντας προσεκτικά τις οδηγίες της εκφώνησης της δραστηριότητας αλλά και τις προφορικές οδηγίες του εκπαιδευτικού και λειτουργώντας στα πλαίσα υπο-ομάδων σχεδίασαν στο γεωπίνακα το μικρότερο ορθογώνιο τρίγωνο, που μπορεί να οριστεί στον γεωπίνακα και κατόπιν πλευρικά του τριγώνου αυτού σχεδίασαν τρία τετράγωνα, τα οποία είχαν για πλευρές, τις πλευρές του αρχικού τριγώνου. Οι μαθητές ακολουθώντας προσεκτικά τις οδηγίες του εκπαιδευτικού κατάφεραν να σχεδιάσουν τα σχήματα που τους ζητούνταν και να τα μετέφεραν και στον πίνακα αναπαράστασης που υπήρχε στο φύλλο εργασίας του (βλ. Εικόνα 8). Ωστόσο αξίζει να σημειωθεί πως οι περισσότεροι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολία στη προσπάθειά τους να σχεδιάσουν το τετράγωνο που είχε για πλευρά την υποτείνουσα του αρχικού τριγώνου.



Εικόνα 9. Απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα β της δραστηριότητα 2, του Φύλλου Εργασίας 2

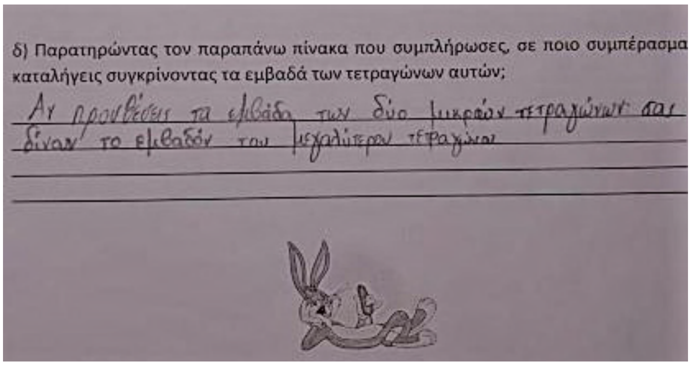
Στο δεύτερο υπο-ερώτημα αυτής της δραστηριότητας οι μαθητές υπολόγισαν τα εμβαδά των τετραγώνων που σχεδίασαν να εφάπτονται στο ορθογώνιο τρίγωνο κατά το προηγούμενο υπο-ερώτημα. Μάλιστα και σε αυτή την περίπτωση δόθηκε από την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό η οδηγία να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές πολύχρωμα λαστιχάκια ώστε να καλύψουν το εσωτερικό των τετραγώνων με ορθογώνια τρίγωνα μισής τετραγωνικής μονάδας. Έτσι οι μαθητές υπολόγισαν τα εμβαδά των τετραγώνων αυτών σε μισές τετραγωνικές μονάδες. Επιπρόσθετα οι μαθητές υπολόγισαν και το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων που εφάπτονταν στις κάθετες πλευρές του αρχικού τριγώνου που σχεδίασαν. Όλοι οι μαθητές συνεργάστηκαν και υπολόγισαν τα εμβαδά που τους ζητούνταν χωρίς καμία δυσκολία (βλ. Εικόνα 9).

Στο τρίτο υπο-ερώτημα αυτής της δραστηριότητας όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά στο εξής ερώτημα: «*Με πόσες τετραγωνικές μονάδες ισούται το εμβαδόν του τετραγώνου της μεγαλύτερης πλευράς του αρχικού τριγώνου;*» (βλ. Εικόνα 10). Μέσω αυτού του ερωτήματος οι μαθητές συνειδητοποίησαν ότι το μεγαλύτερο τετράγωνο που σχεδίασαν έχει εμβαδόν ίσο με 2 τετραγωνικές μονάδες, κάνοντας μετατροπή από τις μισές τετραγωνικές μονάδες που υπολόγισαν στην αρχή στις ολόκληρες τετραγωνικές μονάδες.



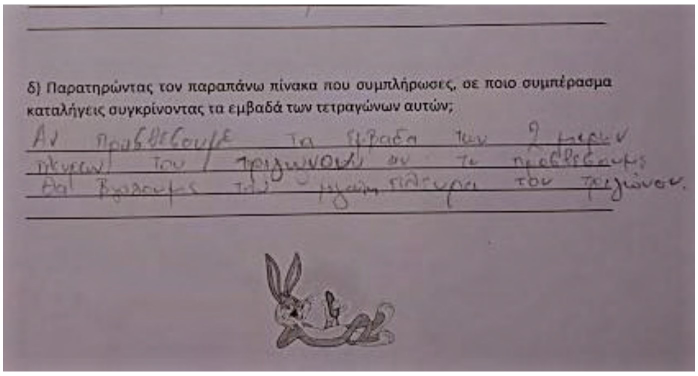
Εικόνα 10. Απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα γ της δραστηριότητα 2, του Φύλλου Εργασίας 2

Κατά το τελευταίο υπο-ερώτημα της δραστηριότητας οι μαθητές έπρεπε να παρατηρήσουν τις μετρήσεις των εμβαδών των τετραγώνων που κατέγραψαν στον πίνακα του υπο-ερωτήματος β της δραστηριότητας αυτής, με σκοπό να συγκρίνουν τα εμβαδά των τετραγώνων και να διαπιστώσουν κάποιο σχετικό συμπέρασμα. Οι μαθητές κατόπιν συζητήσεως στα πλαίσια των υπο-ομάδων και των ομάδων τους διαπίστωσαν ότι «*Το άθροισμα των εμβαδών των δύο μικρών τετραγώνων που έχουν για πλευρές τους τις κάθετες πλευρές του αρχικού τετραγώνου ισούται με το εμβαδόν του μεγαλύτερου τετραγώνου της υποτείνουσας του αρχικού τριγώνου.*» Από τους 23 μαθητές που συμμετείχαν στη δραστηριότητα αυτή, οι 21 μαθητές κατάφεραν να οδηγηθούν σε ορθά συμπεράσματα (βλ. Εικόνα 11). Οι υπόλοιποι 2 μαθητές ενώ κατέληξαν στο ίδιο συμπέρασμα με τους υπόλοιπους μαθητές, δεν κατάφεραν ωστόσο να διατυπώσουν ορθά το συμπέρασμά τους αυτό (βλ. Εικόνα 12).


δ) Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα που συμπλήρωσες, σε ποιο συμπέρασμα καταλήγεις συγκρίνοντας τα εμβαδά των τετραγώνων αυτών;

Αν προσθέσεις τα εμβαδά των δύο μικρών τετραγώνων σου δίνει το εμβαδόν του μεγαλύτερου τετραγώνου

Εικόνα 11. Ορθό συμπέρασμα μαθητή στο υπο-ερώτημα δ της δραστηριότητα 2, του Φύλλου Εργασίας 2


δ) Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα που συμπλήρωσες, σε ποιο συμπέρασμα καταλήγεις συγκρίνοντας τα εμβαδά των τετραγώνων αυτών;

Αν προσθέσουμε τα εμβαδά των 2 μικρών πλευρών του τριγώνου αν τα προσθέσουμε θα βρούμε τη μεγάλη πλευρά του τριγώνου.

Εικόνα 12. Λανθασμένο συμπέρασμα μαθητή στο υπο-ερώτημα δ της δραστηριότητα 2, του Φύλλου Εργασίας 2

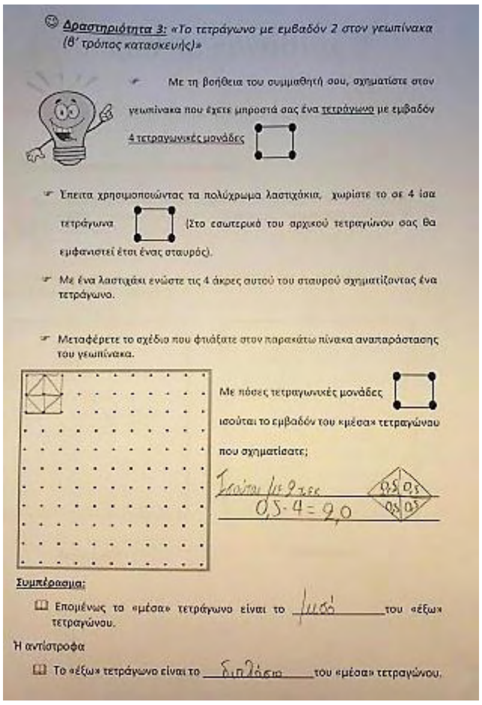
Ο παρακάτω διάλογος αποτελεί δείγμα μίας συζήτησης που πραγματοποιήθηκε μεταξύ μιας υπο-ομάδας μαθητών με σκοπό να καταλήξουν στο συμπέρασμα αυτού του υπο-ερωτήματος:

M_1 : «*Αφού όσο κάνει το εμβαδόν του τετραγώνου 1 και του τετραγώνου 2 μαζί, τόσο κάνει το εμβαδόν του τετραγώνου 3, τότε αυτό σημαίνει ότι είναι ίσα.*»

M_2 : «*Ναι, αν δηλαδή προσθέσουμε το εμβαδόν του τετραγώνου 1 και το εμβαδόν του τετραγώνου 2 μας κάνει τέσσερις μισές τετραγωνικές μονάδες, δηλαδή δύο ολόκληρες. Και το εμβαδόν του τετραγώνου 3 επίσης είναι ίσο με τέσσερις μισές τετραγωνικές μονάδες, δηλαδή δύο ολόκληρες. Άρα μπορούμε να γράψουμε αυτό το συμπέρασμα.*»

<u>Δραστηριότητα 3η: «Το τετράγωνο με εμβαδόν 2 στον γεωπίνακα (β’ τρόπος κατασκευής)»</u>

Σε αυτή την δραστηριότητα του Φύλλου Εργασίας 2 (βλ. Παράρτημα), οι μαθητές υπό την καθοδήγηση της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού ανακάλυψαν ένα δεύτερο τρόπο κατασκευής του τετραγώνου με εμβαδόν 2 τετραγωνικά εκατοστά/τετραγωνικές μονάδες. Σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές ακολουθώντας προσεκτικά τις οδηγίες του φύλλου εργασίας και της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού εφάρμοσαν τη μέθοδο των Βαβυλωνίων υποδιπλασιάζοντας την τετραγωνική επιφάνεια.



Εικόνα 13. Σωστή απάντηση μαθήτριας στη δραστηριότητα 3, του Φύλλου Εργασίας 2

Πιο συγκεκριμένα όλοι οι μαθητές χωρίς καμία δυσκολία κατάφεραν να σχεδιάσουν στο γεωπίνακά τους ένα τετράγωνο με εμβαδόν 4 τετραγωνικές μονάδες, το οποίο στη συνέχεια το υποδιαίρεσαν και έτσι κατάφεραν να σχηματίσουν στο εσωτερικό του ένα δεύτερο τετράγωνο με επιφάνεια ίση με 2 τετραγωνικές μονάδες. Οι μαθητές μετέφεραν τα σχήματά τους και στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα, που υπήρχε στο φύλλο εργασίας. Τέλος, οι μαθητές συνεργάστηκαν και συμπλήρωσαν ορθά το συμπέρασμα του φύλλου εργασίας. Μέσω του συγκεκριμένου συμπεράσματος οι μαθητές διαπίστωσαν ότι το τετράγωνο που σχεδίασαν στο εσωτερικό του αρχικού τετραγώνου είναι το μισό του εξωτερικού τετραγώνου και αντίστροφα το εξωτερικό τετράγωνο είναι το διπλάσιο του εσωτερικού τετραγώνου (βλ. Εικόνα 13).

Ο παρακάτω διάλογος καταγράφθηκε κατά τη διάρκεια της εργασίας των μαθητών στη συγκεκριμένη δραστηριότητα:

M$_1$: «*Ωραία, πρώτα θα φτιάξουμε ένα τετράγωνο με εμβαδόν 4 (δηλαδή 4 τετραγωνικές μονάδες).*»

M$_2$: «*Τώρα θα πρέπει να χωρίσουμε με τα λαστιχάκια τα 4 τετράγωνα που σχηματίζονται μέσα σ’ αυτό*.»

M3 : «*Ωραία, αλλά τι εννοεί όταν λέει ότι θα εμφανιστεί ένας σταυρός;*»

M2 : «*Α! Το βρήκα! Αν κοιτάξετε στο κέντρο του τετραγώνου, έτσι όπως χωρίσαμε τα τετράγωνα βγαίνει ένας σταυρός. (Ο μαθητής δείχνει στους συμμαθητές του τον σταυρό που σχηματίζεται από τα λαστιχάκια, έτσι όπως τα τοποθέτησαν.)*»

M1 : «*Σωστά! Τώρα θα πρέπει να ενώσουμε τις τέσσερις άκρες του σταυρού με ένα λαστιχάκι. (Ο μαθητής επιχειρεί να ενώσει τις άκρες του σταυρού με ένα λαστιχάκι.)*»

M3 : «*Ωραία. Ας φτιάξω το σχήμα στον πίνακα του φύλλου εργασίας. (Ο μαθητής μεταφέρει στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα τα σχήματα που έχουν σχεδιάσει στον γεωπίνακα.)*»

M2 : «*Τώρα πρέπει να βρούμε με πόσες τετραγωνικές μονάδες ισούται το εμβαδόν του «μέσα» τετραγώνου που φτιάξαμε στο τέλος;*»

M1 : «*Ισούται με τέσσερις μισά τετράγωνα (δηλαδή με τέσσερις τετραγωνικές μονάδες). Άρα είναι ίσο με 2 τετραγωνικές μονάδες.*»

M3 : «*Άρα αφού το «έξω» τετράγωνο είναι τέσσερις τετραγωνικές μονάδες και το «μέσα» είναι δύο, αυτό σημαίνει ότι το «μέσα» τετράγωνο είναι το μισό του «έξω».*»

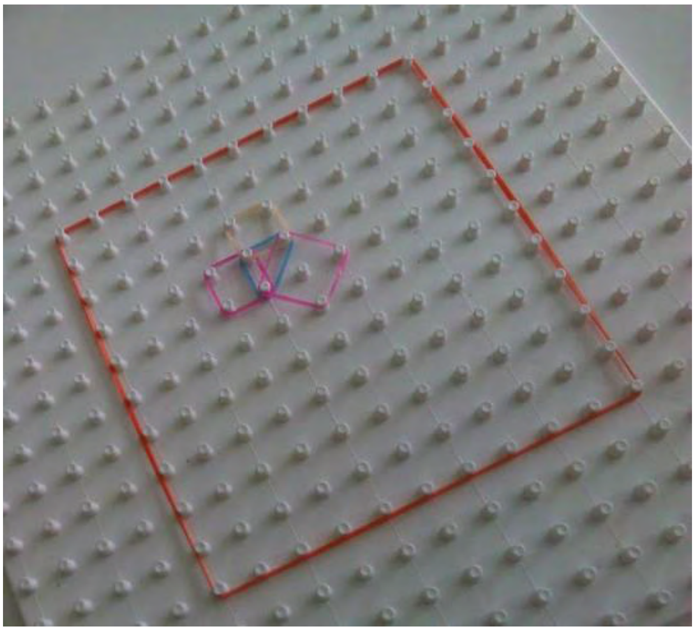
M2 : «*Και αντίστροφα το «έξω» τετράγωνο είναι το διπλάσιο του «μέσα».*»

Στη συνέχεια ακολουθεί φωτογραφικό υλικό, το οποίο λήφθηκε κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης και ενόσω οι μαθητές συνεργάζονταν και δραστηριοποιούνταν πάνω στις δραστηριότητες του δεύτερου φύλλου εργασίας.

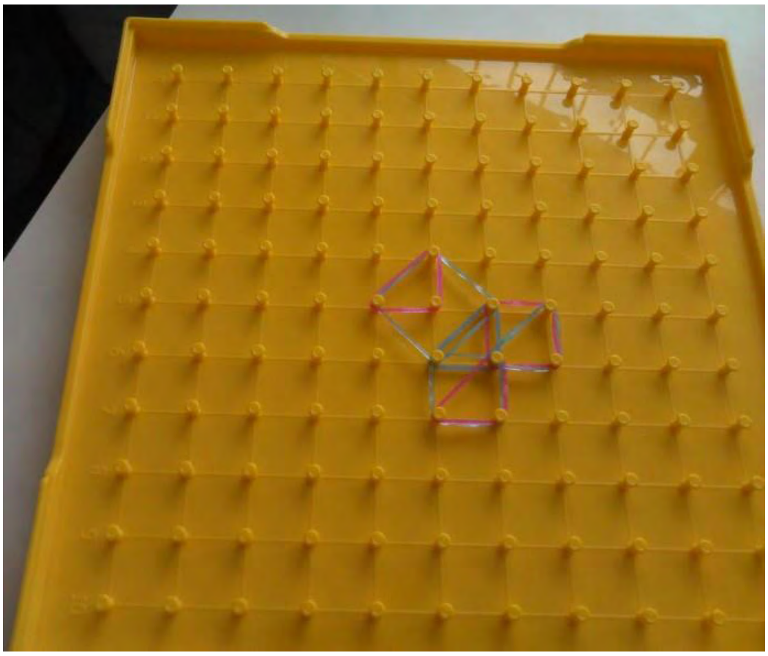
<u>Δραστηριότητα 1^{η}: «Τα τετράγωνα»</u>

Εικόνα 1

<u>Δραστηριότητα 2^{η}: «Το τετράγωνο με εμβαδόν 2 στον γεωπίνακα (α' τρόπος κατασκευής)»</u>



Εικόνα 2



Εικόνα 3

<u>Δραστηριότητα 3η: «Το τετράγωνο με εμβαδόν 2 στον γεωπίνακα (β’ τρόπος κατασκευής)»</u>

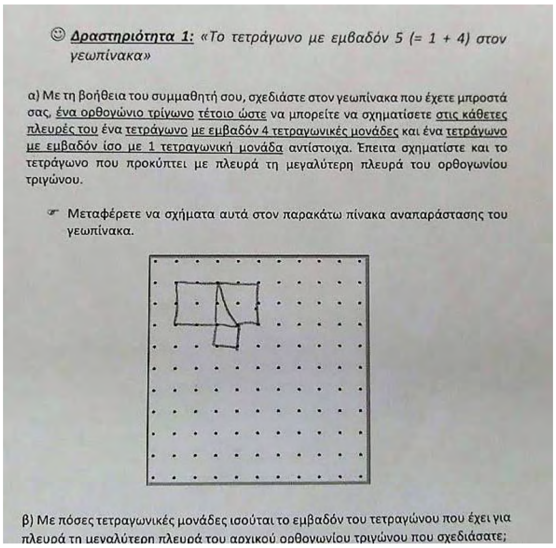
Εικόνα 4

5.3.3 Τρίτο φύλλο εργασίας

<u>Δραστηριότητα 1η: «Το τετράγωνο με εμβαδόν 5 (= 1 + 4) στον γεωπίνακα»</u>

Το τρίτο φύλλο εργασίας περιελάμβανε μόνο μία δραστηριότητα (βλ. Παράρτημα), κατά την οποία οι μαθητές εργάστηκαν στα πλαίσια των ομάδων τους και υπό την καθοδήγηση της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού με σκοπό να εφαρμόσουν την κινέζικη απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος ώστε να καταφέρουν να σχεδιάσουν στον γεωπίνακα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με 5 τετραγωνικές μονάδες/τετραγωνικά εκατοστά. Και σε αυτή την περίπτωση, όπως αντίστοιχα και στην περίπτωση της δραστηριότητας 2 του Φύλλου Εργασίας 2, οι μαθητές μαθαίνουν να εφαρμόζουν υποσυνείδητα την απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος και μέσω της καθοδηγούμενης ανακάλυψης καταλήγουν στον τρόπο κατασκευής του τετραγώνου με εμβαδόν 5 τ.εκ.

Κατά το πρώτο υπο-ερώτημα αυτής της δραστηριότητας, οι μαθητές έπρεπε να ακολουθήσουν τις οδηγίες του φύλλου εργασίας και της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού ώστε να σχηματίσουν στον γεωπίνακα ένα ορθογώνιο τρίγωνο, τέτοιο ώστε να μπορούν στη συνέχεια να σχεδιάσουν στις δύο κάθετες πλευρές του ένα τετράγωνο με εμβαδόν 4 τετραγωνικές μονάδες και ένα τετράγωνο με εμβαδόν 1 τετραγωνική μονάδα αντίστοιχα. Επιπρόσθετα τους ζητούνταν να σχεδιάσουν και το τετράγωνο που προέκυπτε με πλευρά την υποτείνουσα του τριγώνου. Οι μαθητές ακολούθησαν προσεκτικά τις οδηγίες που τους δόθηκαν, παρόλα αυτά όμως αντιμετώπισαν δυσκολία στο σχεδιασμό του τετραγώνου που είχε για πλευρά του την υποτείνουσα του αρχικού τριγώνου. Έτσι λοιπόν αν και όλοι οι μαθητές κατάφεραν να συνεργαστούν και να σχεδιάσουν στον γεωπίνακα της ομάδας τους τα σχήματα που τους ζητούνταν, υπήρξαν τρεις μαθητές οι οποίοι δε μπόρεσαν να μεταφέρουν σωστά τα σχήματα αυτά στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα, που υπήρχε στο φύλλο εργασίας (βλ. Εικόνα 1). Οι υπόλοιποι 20 μαθητές μετέφεραν σωστά τα σχήματα και στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα στο φύλλο εργασίας (βλ. Εικόνα 2).

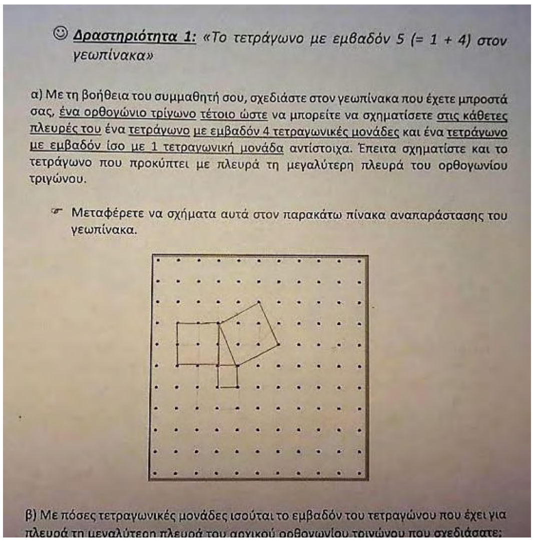

☺ **Δραστηριότητα 1:** *«Το τετράγωνο με εμβαδόν 5 (= 1 + 4) στον γεωπίνακα»*

α) Με τη βοήθεια του συμμαθητή σου, σχεδιάστε στον γεωπίνακα που έχετε μπροστά σας, ένα ορθογώνιο τρίγωνο τέτοιο ώστε να μπορείτε να σχηματίσετε στις κάθετες πλευρές του ένα τετράγωνο με εμβαδόν 4 τετραγωνικές μονάδες και ένα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με 1 τετραγωνική μονάδα αντίστοιχα. Έπειτα σχηματίστε και το τετράγωνο που προκύπτει με πλευρά τη μεγαλύτερη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου.

☞ Μεταφέρετε να σχήματα αυτά στον παρακάτω πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα.

β) Με πόσες τετραγωνικές μονάδες ισούται το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά τη μεγαλύτερη πλευρά του αρχικού ορθογωνίου τριγώνου που σχεδιάσατε;

Εικόνα 1. Λανθασμένος σχεδιασμός μαθητή στο υπο-ερώτημα α της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 3


☺ **Δραστηριότητα 1:** *«Το τετράγωνο με εμβαδόν 5 (= 1 + 4) στον γεωπίνακα»*

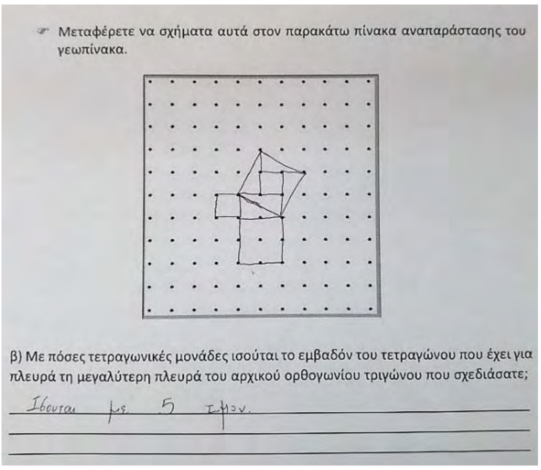
α) Με τη βοήθεια του συμμαθητή σου, σχεδιάστε στον γεωπίνακα που έχετε μπροστά σας, ένα ορθογώνιο τρίγωνο τέτοιο ώστε να μπορείτε να σχηματίσετε στις κάθετες πλευρές του ένα τετράγωνο με εμβαδόν 4 τετραγωνικές μονάδες και ένα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με 1 τετραγωνική μονάδα αντίστοιχα. Έπειτα σχηματίστε και το τετράγωνο που προκύπτει με πλευρά τη μεγαλύτερη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου.

☞ Μεταφέρετε να σχήματα αυτά στον παρακάτω πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα.

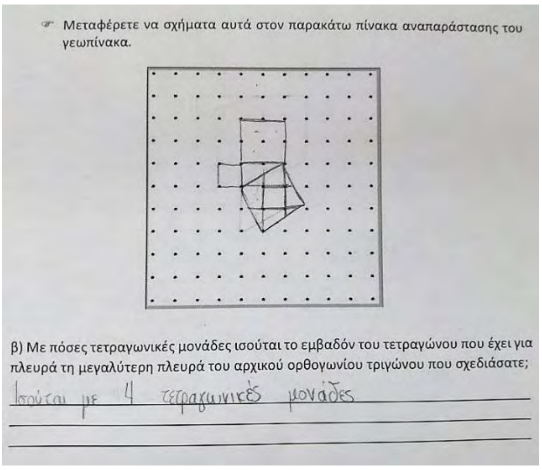
β) Με πόσες τετραγωνικές μονάδες ισούται το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά τη μεγαλύτερη πλευρά του αρχικού ορθογωνίου τριγώνου που σχεδιάσατε;

Εικόνα 2. Σωστός σχεδιασμός μαθήτριας στο υπο-ερώτημα α της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 3

Κατά το δεύτερο υπο-ερώτημα της δραστηριότητας, οι μαθητές κλήθηκαν να υπολογίσουν το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την υποτείνουσα του αρχικού τριγώνου, που σχεδίασαν στο προηγούμενο υπο-ερώτημα. Από τους 23 μαθητές που συμμετείχαν σε αυτή τη δραστηριότητα, οι 14 μαθητές απάντησαν σωστά στο συγκεκριμένο υπο-ερώτημα, δηλώνοντας ότι το εμβαδόν του συγκεκριμένου τετραγώνου ισούται με 5 τετραγωνικές μονάδες (βλ. Εικόνα 3). Από την άλλη πλευρά οι υπόλοιποι 9 μαθητές δήλωσαν λανθασμένα ότι το εμβαδόν του συγκεκριμένου τετραγώνου ισούται με 4 τετραγωνικές μονάδες (βλ. Εικόνα 4). Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να υπολογίσουν το εμβαδόν του συγκεκριμένου τετραγώνου καθώς στην προσπάθειά τους να επιμερίσουν το τετράγωνο αυτό σε μισές ή ολόκληρες τετραγωνικές μονάδες ώστε να μπορέσουν να εκτιμήσουν το συνολικό εμβαδόν του τετραγώνου, διαπίστωσαν ότι το τετράγωνο αποτελείται και από επιφάνειες μεγαλύτερες ή μικρότερες της μισής τετραγωνικής μονάδας, των οποίων τον εμβαδόν ήταν δύσκολο να εκτιμηθεί. Κάτι τέτοιο δε τους βοήθησε ώστε να μπορέσουν να υπολογίσουν με ακρίβεια το συγκεκριμένο εμβαδόν. Συνεπώς οι απαντήσεις τους στο συγκεκριμένο υπο-ερώτημα διέφεραν, καθώς οι εκτιμήσεις τους είχαν κάποιες αποκλίσεις.

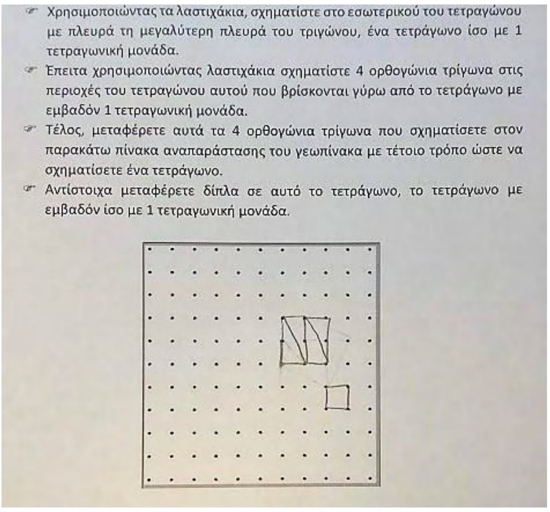


Εικόνα 3. Σωστή εκτίμηση μαθήτριας στο υπο-ερώτημα β της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 3



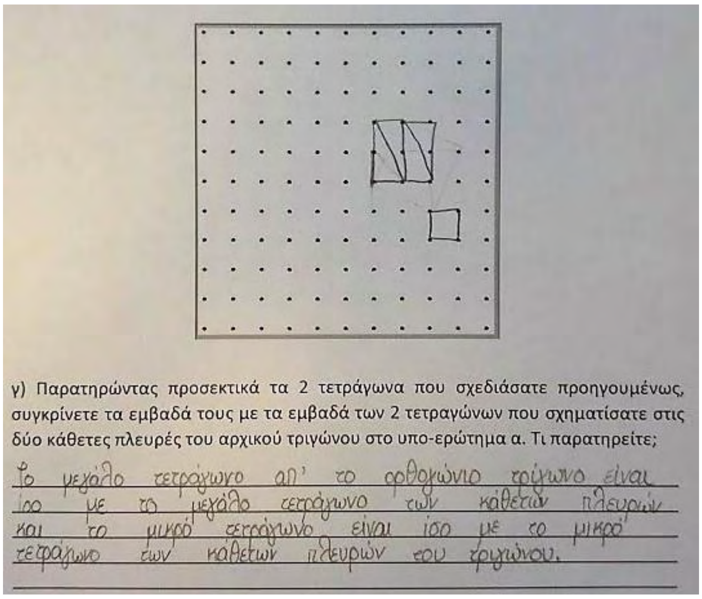
Εικόνα 4. Λανθασμένη εκτίμηση μαθήτριας στο υπο-ερώτημα β της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 3

Κατόπιν οι μαθητές ακολούθησαν τις οδηγίες της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού αλλά και τις γραπτές οδηγίες που τους δίνονταν στα φύλλα εργασίας τους. Μέσω της συγκεκριμένης διαδικασίας που ακολούθησαν και των μετέπειτα υπο-ερωτημάτων, οι μαθητές μπόρεσαν πλέον να υπολογίσουν με ακρίβεια το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την υποτείνουσα του αρχικού τριγώνου και να καταλήξουν σε κάποια συμπεράσματα. Έτσι λοιπόν στα πλαίσια αυτής της διαδικασίας οι μαθητές επιμέρισαν το τετράγωνο που εφαπτόταν στην υποτείνουσα του αρχικού τριγώνου με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίσουν στο εσωτερικό του ένα τετράγωνο με εμβαδόν 1 τετραγωνική μονάδα και γύρω από αυτό 4 ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Στη συνέχεια μετέφεραν στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα που υπήρχε στα φύλλα εργασίας τους το τετράγωνο με εμβαδόν 1 τετραγωνική μονάδα αλλά και τα 4 ορθογώνια τρίγωνα με τέτοιο τρόπο ώστε να συνθέσουν ένα δεύτερο τετράγωνο (βλ. Εικόνα 5).

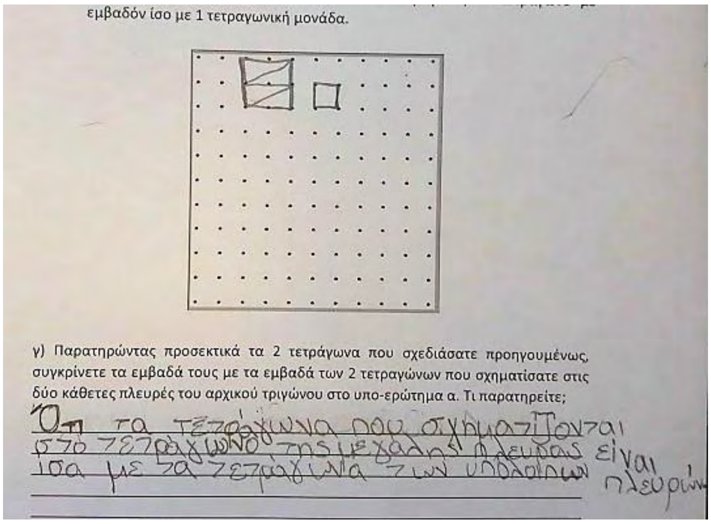


Εικόνα 5. Σωστός σχεδιασμός μαθητή στη δραστηριότητα 1, του Φύλλου Εργασίας 3

Στο τρίτο υπο-ερώτημα της δραστηριότητας σύγκριναν τα εμβαδά των δύο τετραγώνων που κατασκεύασαν προηγουμένως, με τα εμβαδά των δύο τετραγώνων που σχεδίασαν στις δύο κάθετες πλευρές του αρχικού τριγώνου κατά το πρώτο υπο-ερώτημα της δραστηριότητας. Στα πλαίσια αυτού του υπο-ερωτήματος όλοι οι μαθητές διαπίστωσαν ότι τα τετράγωνα που σχημάτισαν από τα επιμέρους μέρη του τετραγώνου της υποτείνουσας του αρχικού τριγώνου είναι ισεμβαδικά με τα αντίστοιχα τετράγωνα που σχημάτισαν στις δύο κάθετες πλευρές του αρχικού τριγώνου. (βλ. Εικόνα 6 και Εικόνα 7).



Εικόνα 6. Σωστή απάντηση μαθήτριας στο υπο-ερώτημα γ της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 3



Εικόνα 7. Σωστή απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα γ της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 3

Ο διάλογος που παρατίθεται στη συνέχεια φανερώνει τις σκέψεις των μαθητών γύρω από αυτή τη διαπίστωση:

Μ1 : «*Πώς να ενώσουμε τα 4 τρίγωνα που βγαίνουν μέσα από το τετράγωνο;*»

Μ2 : «*Κάνε πρώτα το ένα τρίγωνο στο γεωπίνακα. (Ο μαθητής σχηματίζει το τρίγωνο στον γεωπίνακα.) Τώρα θα πρέπει να κολλήσουμε άλλο ένα τρίγωνο δίπλα σε αυτό με ανάποδη φορά, σα να το συμπληρώνει.*»

Μ1 : «*Αλλά τώρα βγαίνει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με αυτά τα 2 τρίγωνα ενωμένα. Ας κολλήσουμε και τα άλλα 2 τρίγωνα από δίπλα με τον ίδιο τρόπο. (Οι μαθητές σχηματίζουν και τα άλλα δύο τρίγωνα κολλητά στα προηγούμενα.)*»

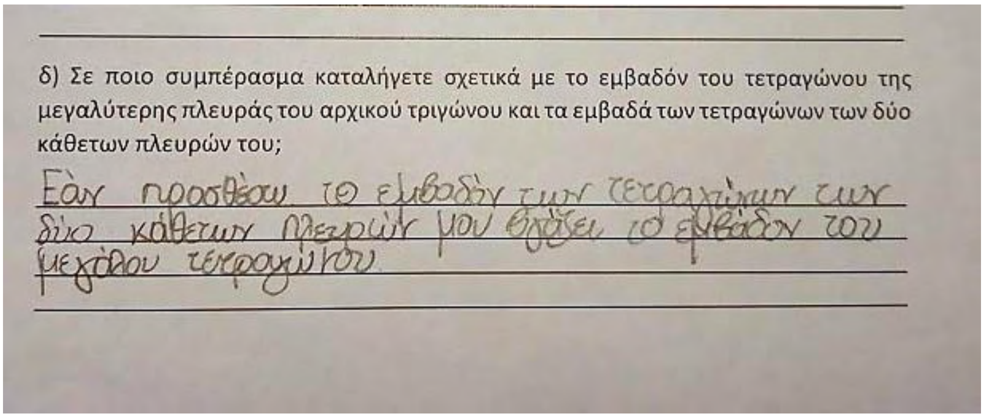
Μ2 : «*Σωστά! Τώρα βγάλαμε ένα τετράγωνο. Ας σχεδιάσουμε κάπου πιο πέρα και το τετράγωνο με τη μία τετραγωνική μονάδα.*»

Μ1 : «*Τώρα πρέπει να συγκρίνουμε τα εμβαδά αυτών τετραγώνων με τα εμβαδά των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του τριγώνου που κάναμε στην αρχή. (Οι μαθητές συγκρίνουν τα εμβαδά.)*»

Μ2 : «*Το μικρά τετράγωνα είναι ίσα αφού έχουν εμβαδόν ίσο με 1 τετραγωνική μονάδα.*»

Μ1 : «*Και τα άλλα δύο έχουν εμβαδόν 4. Άρα είναι ίσα....Άρα μπορούμε να γράψουμε ως συμπέρασμα ότι τα τετράγωνα που βγαίνουν από το μεγάλο τετράγωνο είναι ίσα με τα τετράγωνα των κάθετων πλευρών.*»

Στο τελευταίο υπο-ερώτημα της δραστηριότητας οι μαθητές διατύπωσαν ένα συμπέρασμα που αφορά τη σχέση του εμβαδού του τετραγώνου της μεγαλύτερης πλευράς ενός τριγώνου με τα εμβαδά των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του. Όλοι οι μαθητές διαπίστωσαν ότι εάν προσθέσουμε τα εμβαδά των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών ενός τριγώνου θα βρούμε το εμβαδόν του τετραγώνου της υποτείνουσάς του (βλ. Εικόνα 8), όπως φαίνεται και στον παρακάτω διάλογο.


δ) Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγετε σχετικά με το εμβαδόν του τετραγώνου της μεγαλύτερης πλευράς του αρχικού τριγώνου και τα εμβαδά των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του;

Εάν προσθέσω το εμβαδόν των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών μου βγάζει το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου

Εικόνα 8. Σωστή απάντηση μαθητή στο υπο-ερώτημα δ της δραστηριότητας 1, του Φύλλου Εργασίας 3

M_1 : «*Ξέρουμε ότι τα τετράγωνα των δύο κάθετων πλευρών του τριγώνου είναι ίσα με τα τετράγωνα που βγαίνουν από το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του τριγώνου.*»

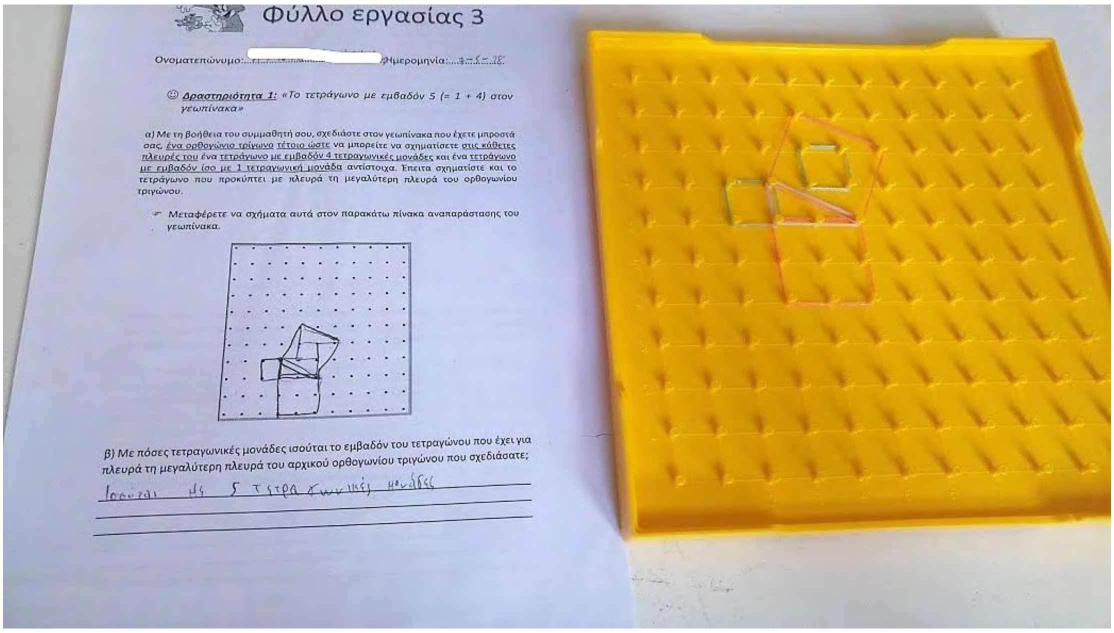
M_2 : «*Τότε μπορούμε να πούμε ότι από τα τετράγωνα των κάθετων πλευρών φτιάχνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς.*»

Ερευνήτρια: «*Τι μπορούμε να κάνουμε λοιπόν εάν θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν του τετραγώνου της μεγαλύτερης πλευράς του αρχικού τριγώνου;*»

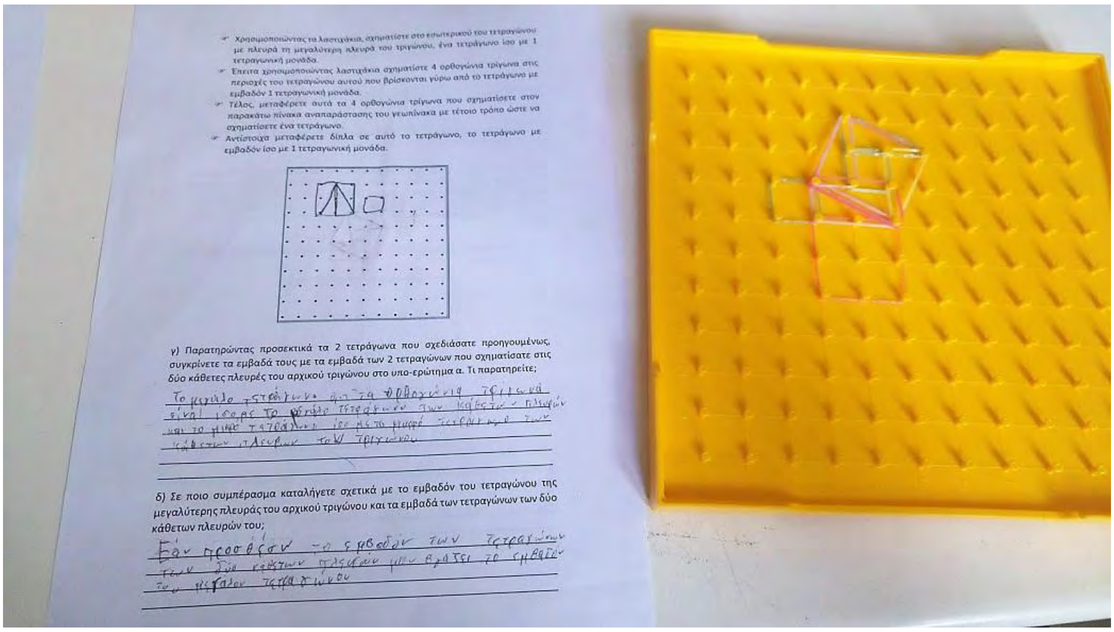
M_3 : «*Μπορούμε να προσθέσουμε τα εμβαδά των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών (4+1) και έτσι να βρούμε το εμβαδόν του τετραγώνου της μεγαλύτερης πλευράς, δηλαδή 5.*»

Στη συνέχεια ακολουθεί φωτογραφικό υλικό, το οποίο λήφθηκε κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης και ενόσω οι μαθητές συνεργάζονταν και δραστηριοποιούνταν πάνω στις δραστηριότητες του τρίτου φύλλου εργασίας.

<u>Δραστηριότητα 1η: «Το τετράγωνο με εμβαδόν 5 (= 1 + 4) στον γεωπίνακα»</u>



Εικόνα 1



Εικόνα 2

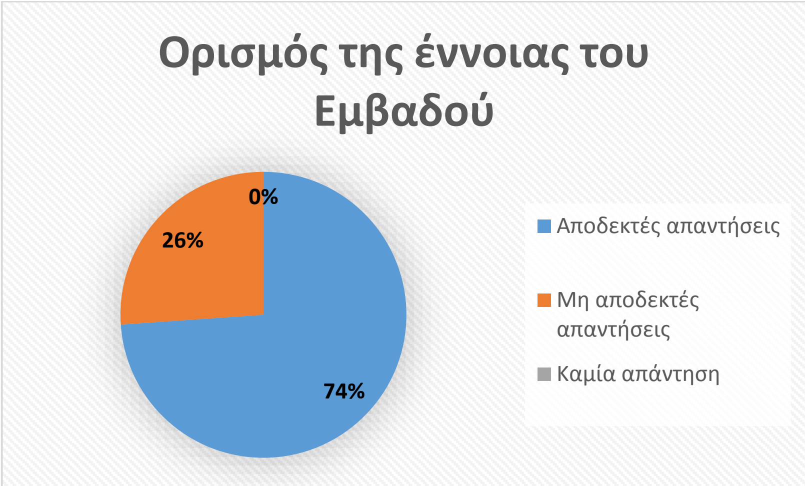
5.4 Παρουσίαση των αποτελεσμάτων του POST-TEST

Μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης χορηγήθηκε στους μαθητές το τεστ τελικής αξιολόγησης (POST-TEST), το οποίο περιελάμβανε 5 ερωτήματα/δραστηριότητες αντίστοιχου περιεχομένου με τα ερωτήματα/δραστηριότητες του τεστ διαγνωστικής αξιολόγησης (PRE-TEST) (βλ. Παράρτημα). Πιο συγκεκριμένα τα ερωτήματα/δραστηριότητες του POST-TEST αφορούσαν στον ορισμό της έννοιας του «Εμβαδού» των γεωμετρικών σχημάτων, στην κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων με συγκεκριμένο εμβαδόν, αλλά και στον υπολογισμό του μήκους της πλευράς και της περιμέτρου ενός σχήματος με συγκεκριμένο εμβαδόν. Ωστόσο αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση του POST-TEST, κατά τα ερωτήματα/δραστηριότητες που αφορούσαν στην κατασκευή επίπεδων σχημάτων με συγκεκριμένο εμβαδόν, οι μαθητές καλούνταν να αποτυπώσουν να σχήματά τους σε πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα που υπήρχε στο φύλλο εργασίας του POST-TEST, κάτι το οποίο δε συνέβαινε στην περίπτωση του PRE-TEST.

Μέσω του συγκεκριμένου τεστ τελικής αξιολόγησης είμαστε σε θέση να διαπιστώσουμε κατά πόσο οι μαθητές αφομοίωσαν τους νέους τρόπους υπολογισμού του εμβαδού επίπεδων σχημάτων με τη χρήση του γεωπίνακα και την έμμεση εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος. Κατά συνέπεια θα μπορέσουμε να δώσουμε απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα που θέσαμε εξαρχής και να διατυπώσουμε συμπεράσματα και προτάσεις γύρω από το ερευνητικό πρόβλημα, που μας απασχολεί. Σε αυτό το σημείο λοιπόν θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις απαντήσεις των μαθητών/τριών στο POST-TEST.

Οι απαντήσεις των μαθητών στο πρώτο ερώτημα του POST-TEST, που αφορούσε τον προσδιορισμό της μαθηματικής έννοιας του Εμβαδού ενός γεωμετρικού σχήματος, συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα (βλ. Πίνακα 1).

Στο ερώτημα αυτό, αποδεκτές κρίθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών, οι οποίοι όρισαν την έννοια του «Εμβαδού» ως εξής: «*Εμβαδόν ονομάζουμε το εσωτερικό ενός σχήματος*», «*Εμβαδόν ονομάζεται η επιφάνεια που καλύπτει ένα γεωμετρικό σχήμα*» «*Εμβαδόν ενός γεωμετρικός σχήματος είναι ο χώρος που καταλαμβάνει το γεωμετρικό σχήμα*», «*Εμβαδόν ονομάζουμε τον μέσα χώρο ενός σχήματος*». Στο σύνολο οι μαθητές που έδωσαν αποδεκτές απαντήσεις ήταν 17 και αποτελούν το 74% επί του συνολικού πληθυσμού των μαθητών της τάξης.



Πίνακας 1. Ορισμός της μαθηματικής έννοιας του Εμβαδού

Ως μη αποδεκτές κρίθηκαν οι απαντήσεις 6 μαθητών, που εκφράζουν το 26% του συνολικού πληθυσμού της τάξης. Από αυτούς 5 μαθητές προσδιόρισαν το «Εμβαδόν» ενός γεωμετρικού σχήματος ως το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του μήκους επί το πλάτος ενός σχήματος. Καθώς επίσης μη αποδεκτή κρίθηκε και η απάντηση μίας μαθήτριας, η οποία όρισε το Εμβαδόν ως το σύνολο των τετραγωνικών μέτρων/εκατοστών/χιλιοστών ενός σχήματος. Παράλληλα δεν υπήρξαν μαθητές που να άφησαν αναπάντητο το ερώτημα αυτό.

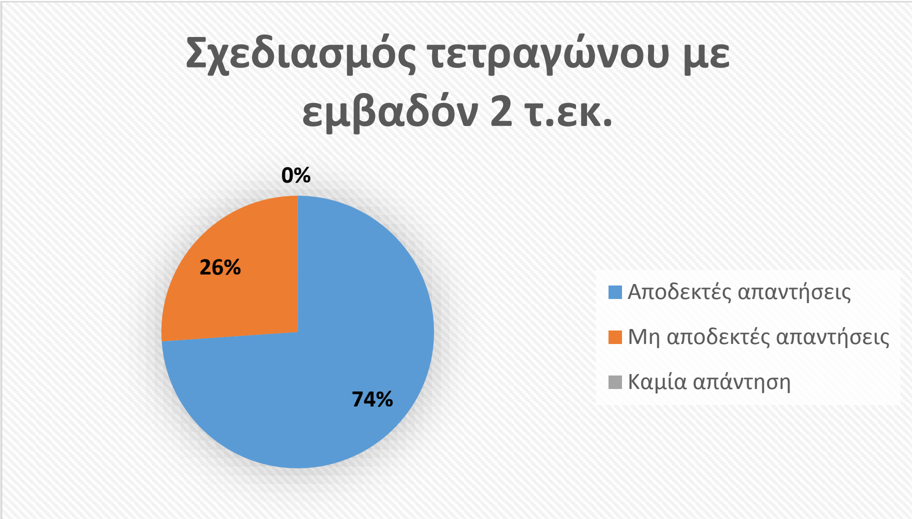
Κατά το δεύτερο ερώτημα του POST-TEST οι μαθητές κλήθηκαν πρώτα να σχεδιάσουν ένα τετράγωνο με εμβαδόν 4 τ.εκ. στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα, που τους δινόταν στο φύλλο εργασίας του POST-TEST. Έπειτα οι μαθητές έπρεπε να απαντήσουν σε δύο υπο-ερωτήματα. Κατά το πρώτο υπο-ερώτημα, οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν το μήκος της κάθε πλευράς του τετραγώνου που σχεδίασαν και κατά το δεύτερο υπο-ερώτημα, έπρεπε να υπολογίσουν την περίμετρο του τετραγώνου αυτού.

Η αξιολόγηση των απαντήσεων των μαθητών σε αυτό το ερώτημα συνοψίζεται στον ακόλουθο πίνακα (βλ. Πίνακα 2).

Πίνακας 2. Υπολογισμός του μήκους της πλευράς και της περιμέτρου τετραγώνου με εμβαδόν 4 τ.εκ

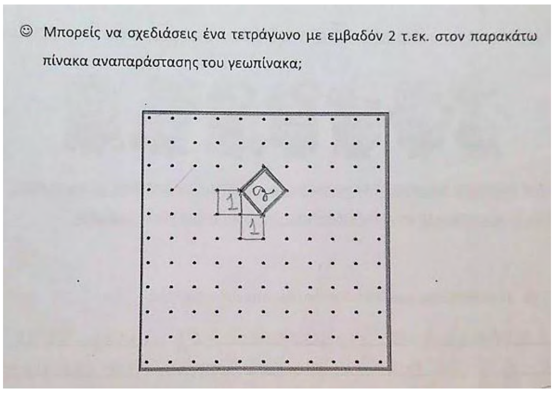
Όπως παρουσιάζεται και στον παραπάνω πίνακα (βλ. Πίνακα 2), 20 μαθητές (87%) απάντησαν σωστά και στα δύο υπο-ερωτήματα, υπολογίζοντας ότι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου με εμβαδόν 4 τ.εκ. είναι 2 εκατοστά, ενώ η περίμετρός του είναι 8 εκατοστά. Από την άλλη πλευρά οι απαντήσεις 3 μαθητών, που συνιστούν το 13% του συνολικού πληθυσμού της τάξης, κρίθηκαν ως μη αποδεκτές, καθώς υπολόγισαν λανθασμένα τόσο το μήκος της πλευράς του συγκεκριμένου τετραγώνου όσο και την περίμετρό του. Πιο συγκεκριμένα, και οι τρεις μαθητές απάντησαν ότι το μήκος της πλευράς του συγκεκριμένου τετραγώνου είναι 3 εκατοστά. Οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών κατά το πρώτο υπο-ερώτημα προέκυψαν καθώς οι συγκεκριμένοι μαθητές υπολόγισαν το μήκος της πλευράς του τετραγώνου που σχεδίασαν, μετρώντας απλά τα καρφάκια του γεωπίνακα, πάνω στα οποία σχεδίασαν την κάθε πλευρά αυτού του τετραγώνου. Συνάμα, οι ίδιοι μαθητές υπολόγισαν λανθασμένα και την περίμετρο του τετραγώνου. Δήλωσαν δηλαδή ότι η περίμετρος του τετραγώνου είναι 12 εκατοστά. Προφανώς η απάντησή τους αυτή σχετίζεται άμεσα με τον τρόπο που υπολόγισαν το μήκος της κάθε πλευράς του τετραγώνου αυτού, κατά το πρώτο υπο-ερώτημα.

Στο τρίτο ερώτημα του POST-TEST οι μαθητές κλήθηκαν να σχεδιάσουν στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα, που υπήρχε στα φύλλα εργασίας του POST-TEST, ένα τετράγωνο με εμβαδόν 2 τ.εκ. Το 74% των μαθητών, δηλαδή 17 μαθητές των μαθητών σχεδίασε ορθά το τετράγωνο με εμβαδόν 2 τ.εκ., είτε εφαρμόζοντας υποσυνείδητα το Πυθαγόρειο Θεώρημα και κατασκευάζοντας το σχήμα της «καρέκλας της νύφης» είτε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο υποδιπλασιασμού της τετραγωνικής επιφάνειας. Ενώ μόλις 6 μαθητές (26%) είχαν λανθασμένα σχήματα και οι απαντήσεις τους κρίθηκαν ως μη αποδεκτές (βλ. Πίνακα 3).

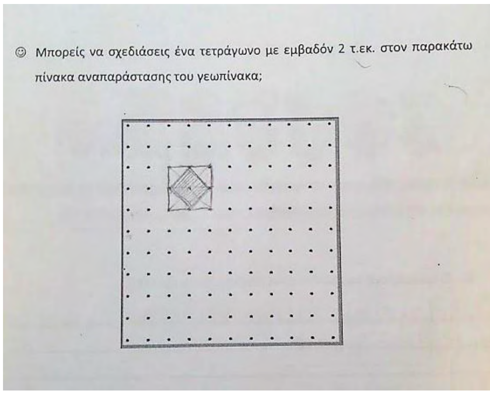


Πίνακας 3. Σχεδιασμός τετραγώνου με εμβαδόν 2 τ.εκ. σε πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα

Από τους 17 μαθητές που σχεδίασαν ορθά το τετράγωνο με εμβαδόν 2 τ.εκ., 10 μαθητές εφάρμοσαν υποσυνείδητα το Πυθαγόρειο Θεώρημα και κατασκεύασαν το σχήμα της «καρέκλας της νύφης» με σκοπό να σχεδιάσουν το συγκεκριμένο τετράγωνο (βλ. Εικόνα 1), ενώ 7 μαθητές χρησιμοποίησαν τη μέθοδο υποδιπλασιασμού της τετραγωνικής επιφάνειας (βλ. Εικόνα 2).

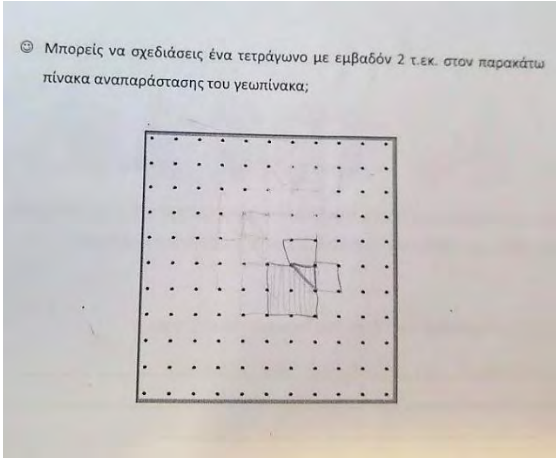


Εικόνα 1. Αποδεκτή απάντηση στο τρίτο ερώτημα του POST-TEST - Σχεδιασμός τετραγώνου με τη μέθοδο του Πυθαγορείου Θεωρήματος και το σχήμα της «καρέκλας της νύφης»



Εικόνα 2. Αποδεκτή απάντηση στο τρίτο ερώτημα του POST-TEST - Σχεδιασμός τετραγώνου με τη μέθοδο του υποδιπλασιασμού

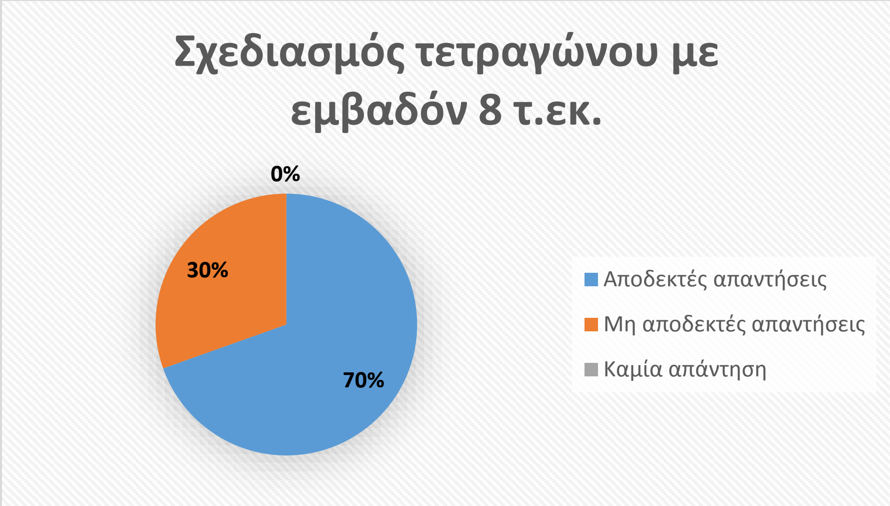
Εντούτοις οι υπόλοιποι 6 μαθητές, των οποίων τα σχήματα ήταν λανθασμένα, εμφάνισαν δυσκολία στην κατασκευή του σχήματος της «καρέκλας της νύφης» κατά εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος κατά (βλ. Εικόνα 3).



Εικόνα 3. Μη αποδεκτή απάντηση στο τρίτο ερώτημα του POST-TEST

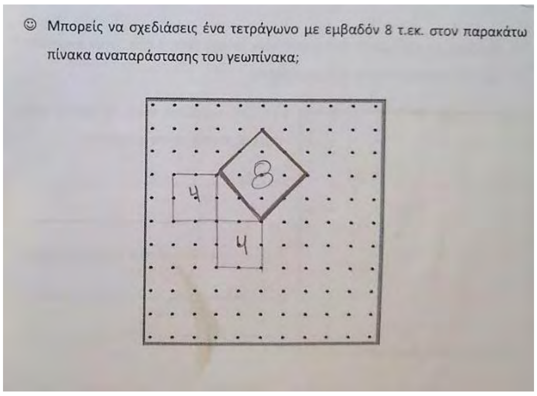
Ανάλογα και στο τέταρτο ερώτημα του POST-TEST, οι μαθητές έπρεπε να σχεδιάσουν στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα ένα τετράγωνο με εμβαδόν 8 τ.εκ, είτε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα και κατασκευάζοντας το σχήμα της «καρέκλας της νύφης» είτε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο υποδιπλασιασμού της τετραγωνικής επιφάνειας.

Όπως παρουσιάζεται και στον Πίνακα 4, 16 μαθητές (70%) σχεδίασαν σωστά το τετράγωνο με εμβαδόν 8 τ.εκ. στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα, σε αντίθεση με τους υπόλοιπους 7 μαθητές (30%), οι οποίοι δε κατάφεραν να σχεδιάσουν ένα τετράγωνο με εμβαδόν 8 τ.εκ., όπως τους ζητήθηκε (βλ. Πίνακα 4).

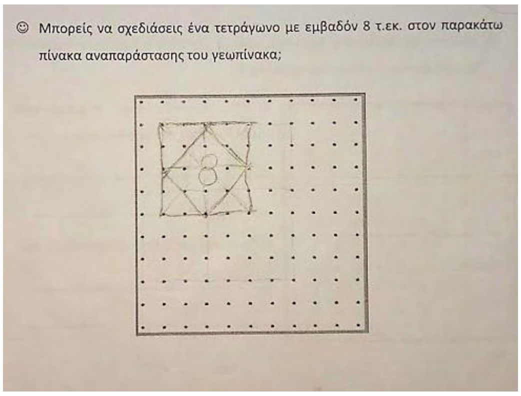


Πίνακας 4. Σχεδιασμός τετραγώνου με εμβαδόν 8 τ.εκ. σε πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα

Αξίζει να σημειωθεί ότι από τους 16 μαθητές που σχεδίασαν σωστά το τετράγωνο με εμβαδόν 8 τ.εκ., 6 μαθητές κατασκεύασαν το σχήμα της «καρέκλας της νύφης» και εφάρμοσαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα, με σκοπό να σχεδιάσουν το συγκεκριμένο τετράγωνο (βλ. Εικόνα 4), ενώ 9 μαθητές εφάρμοσαν τη μέθοδο του υποδιπλασιασμού της τετραγωνικής επιφάνειας (βλ. Εικόνα 5).

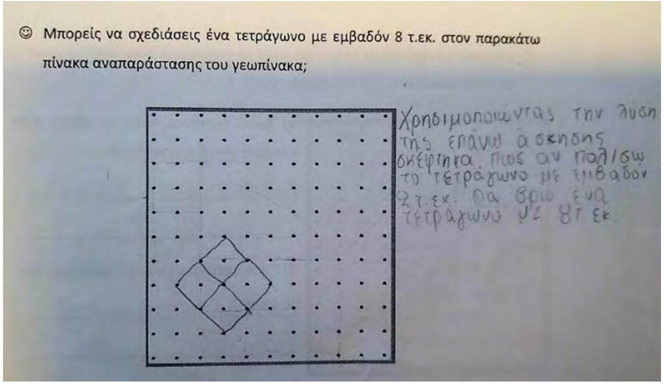


Εικόνα 4. Αποδεκτή απάντηση στο τέταρτο ερώτημα του POST-TEST - Σχεδιασμός τετραγώνου με τη μέθοδο του Πυθαγορείου Θεωρήματος και το σχήμα της «καρέκλας της νύφης»



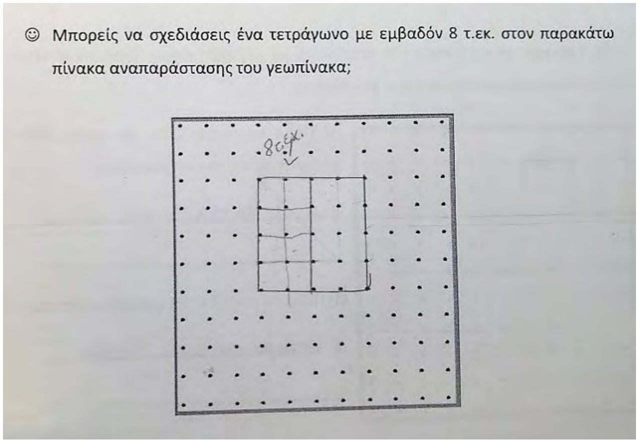
Εικόνα 5. Αποδεκτή απάντηση στο τέταρτο ερώτημα του POST-TEST - Σχεδιασμός τετραγώνου με τη μέθοδο του υποδιπλασιασμού

Παράλληλα υπήρξε ένας μαθητής, οποίος χρησιμοποίησε έναν δικό του σωστό τρόπο σκέψης για να κατασκευάσει το τετράγωνο με εμβαδόν 8 τ.εκ. Ο εν λόγω μαθητής λοιπόν δήλωσε ότι χρησιμοποίησε τη λύση της προηγούμενης άσκησης, που αφορούσε την κατασκευή τετραγώνου με εμβαδόν 2 τ.εκ. και πολλαπλασίασε τέσσερις φορές το τετράγωνο με επιφάνεια 2 τ.εκ. με σκοπό να καταλήξει σε ένα τετράγωνο με επιφάνεια 8 τ.εκ. (βλ. Εικόνα 6).



Εικόνα 6. Αποδεκτή απάντηση στο τέταρτο ερώτημα του POST-TEST - Σχεδιασμός τετραγώνου με μέθοδο του μαθητή

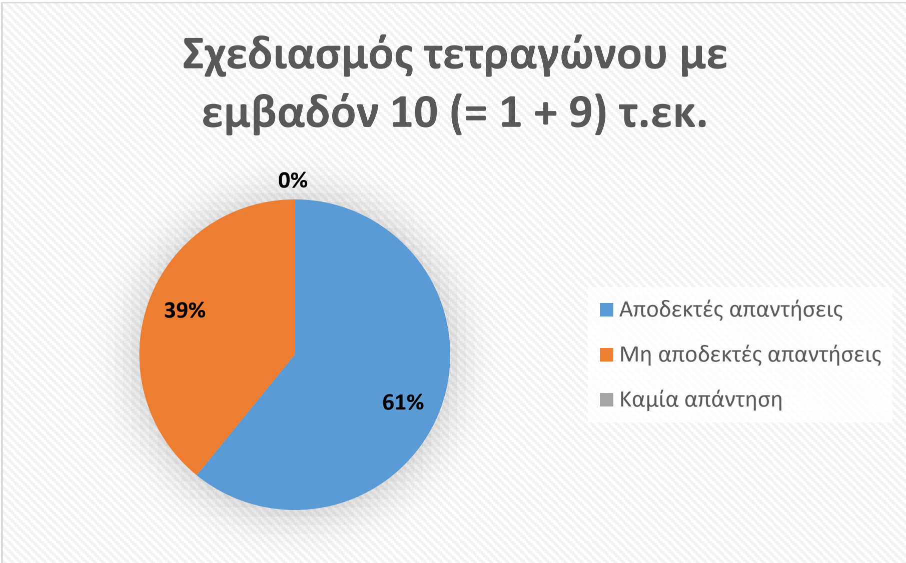
Αντίθετα από τους 7 μαθητές που δε κατάφεραν να σχεδιάσουν τετράγωνο με εμβαδόν 8 τ.εκ., οι 5 μαθητές εφάρμοσαν λανθασμένα τη μέθοδο του υποδιπλασιασμού της τετραγωνικής επιφάνειας, με αποτέλεσμα να σχεδιάσουν ορθογώνια με επιφάνεια 8 τ.εκ. (βλ. Εικόνα 7). Ενώ άλλοι 2 μαθητές κατασκεύασαν τετράγωνα με διαφορετικά εμβαδά.



Εικόνα 7. Μη αποδεκτή απάντηση στο τέταρτο ερώτημα του POST-TEST

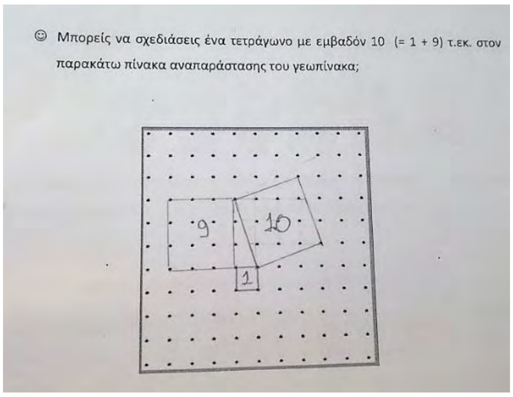
Στο τελευταίο ερώτημα του POST-TEST ζητήθηκε από τους μαθητές να κατασκευάσουν στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα ένα τετράγωνο με εμβαδόν 10 (= 1 + 9) τ.εκ., εφαρμόζοντας την κινέζικη απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος, την οποία είχαν διδαχθεί έμμεσα κατά τη διδακτική παρέμβαση. Σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές καλούνταν να κατασκευάσουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο τέτοιο ώστε στη μία κάθετη πλευρά του να μπορούν να σχεδιάσουν τετράγωνο με επιφάνεια 1 τ.εκ. και στην άλλη κάθετη πλευρά του να μπορούν να σχεδιάσουν τετράγωνο με επιφάνεια 9 τ.εκ. Η εκφώνηση της δραστηριότητας αυτής υπονοούσε έμμεσα και τη μέθοδο που έπρεπε να εφαρμόσουν οι μαθητές ώστε να κατασκευάσουν το συγκεκριμένο τετράγωνο.

Όπως προκύπτει και στον ακόλουθο πίνακα (βλ. Πίνακα 5), 14 μαθητές σχεδίασαν σωστά τετράγωνο με επιφάνεια 10 τ.εκ.. Από την άλλη πλευρά 9 μαθητές δε σχεδίασαν αποδεκτά σχήματα (βλ. Πίνακα 5).

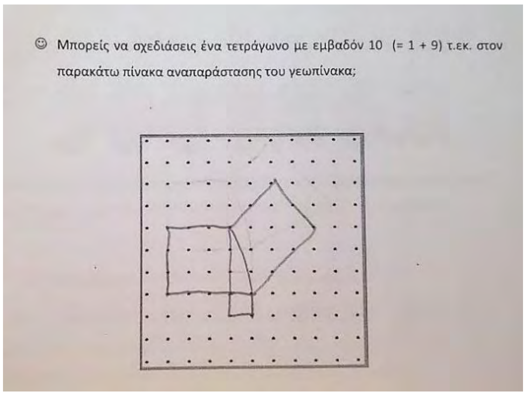


Πίνακας 5. Σχεδιασμός τετραγώνου με εμβαδόν 10 (= 1 + 9) τ.εκ. σε πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα

Στο συγκεκριμένο ερώτημα διαπιστώθηκε ότι 14 μαθητές εφάρμοσαν ορθά την κινέζικη απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος σχεδιάζοντας ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές τέτοιες ώστε να μπορούν να σχεδιάσουν πάνω σε αυτές τετράγωνο με εμβαδόν 1 τ.εκ. και τετράγωνο με εμβαδόν 9 τ.εκ. αντίστοιχα. Στη συνέχεια στην υποτείνουσα αυτού του τριγώνου σχεδίασαν το τετράγωνο με επιφάνεια 10 τ.εκ. (βλ. Εικόνα 8). Ενώ 9 μαθητές αντιμετώπισαν σημαντικές δυσκολίες στη προσπάθειά τους να εφαρμόσουν τη συγκεκριμένη μέθοδο (βλ. Εικόνα 9).



Εικόνα 8. Αποδεκτή απάντηση στο πέμπτο ερώτημα του POST-TEST - Σχεδιασμός τετραγώνου με τη μέθοδο του Πυθαγορείου Θεωρήματος και το σχήμα της «καρέκλας της νύφης»



Εικόνα 9. Μη αποδεκτή απάντηση στο πέμπτο ερώτημα του POST-TEST

5.5 Ανάλυση των αποτελεσμάτων του POST-TEST

Στηριζόμενοι στη θέση των Van-Hiele σύμφωνα με τους οποίους η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών εξαρτάται από τη διδασκαλία και τις μαθησιακές εμπειρίες που αποκτούν οι μαθητές (Hershkowitz, 2014, p.p. 542-547), διαμορφώσαμε μία διαδακτική παρέμβαση με στόχο τη διδασκαλία της έννοιας του «Εμβαδού», η οποία βασίζεται στη χρήση δύο πολύ σημαντικών διδακτικών στρατηγικών στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως αυτό αποδεικνύεται από σχετικές έρευνες που αναφέραμε σε προηγούμενα κεφάλαια. Σύμφωνα με την ανάλυση των αποτελεσμάτων της τελικής αξιολόγησης (POST-TEST), που παρατίθεται στη συνέχεια, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η χρήση ενός χειραπτικού υλικού, όπως ο γεωπίνακας, σε συνδυασμό με την εφαρμογή της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας με στόχο τη διδασκαλία της έννοιας του «Εμβαδού», φαίνεται να συνέβαλε στη βελτιστοποίηση του βαθμού αντίληψης της έννοιας αυτής από τους μαθητές, που αποτελούν το δείγμα της έρευνάς μας. Ωστόσο δε πρέπει να ξεχνάμε ότι λόγω των επιμέρους χαρακτηριστικών της έρευνας, όπως το μικρό μέγεθος του δείγματος και η μικρή διάρκεια της διδακτικής εφαρμογής, δε μπορούμε να καταλήξουμε σε γενικεύσεις και πανάκειες όσον αφορά τη συμβολή των χειραπτικών υλικών και της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας στη διδασκαλία της έννοιας του «Εμβαδού».

Αναλύοντας τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών στο τεστ αποτίμησης της διδακτικής παρέμβασης (POST-TEST), το οποίο περιείχε δραστηριότητες παρόμοιου περιεχομένου με τις δραστηριότητες του διαγνωστικού τεστ και συγκρίνοντας τις επιδόσεις των μαθητών στα δύο αυτά τεστ, προκύπτουν συμπεράσματα μείζονας διερεύνησης.

Αρχικά βάσει των απαντήσεων των μαθητών/τριών στο πρώτο ερώτημα του POST-TEST διαπιστώνουμε πως οι μαθητές/τριες σημείωσαν καλύτερες επιδόσεις όσον αφορά τον προσδιορισμό της μαθηματικής έννοιας του «Εμβαδού» μετά την διδακτική παρέμβαση, σε σύγκριση με τις επιδόσεις των μαθητών/τριών στο αντίστοιχο ερώτημα του PRE-TEST. Κάτι τέτοιο αποδεικνύεται από το γεγονός πως το ποσοστό αποδεκτών απαντήσεων (74%) του συνολικού δείγματος της έρευνάς μας στο ερώτημα του POST-TEST, που σχετίζεται με τον ορισμό της έννοιας του «Εμβαδού», υπερτερεί από το ποσοστό αποδεκτών απαντήσεων (48%) του δείγματος στο αντίστοιχο ερώτημα του PRE-TEST. Επιπλέον βάσει των μη αποδεκτών απαντήσεων των μαθητών στο ερώτημα αυτό του POST-TEST, διαπιστώνεται πως η αδυναμία των μαθητών να προσδιορίσουν την έννοια του «Εμβαδού» οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές έχουν συνδέσει άρρηκτα την έννοια του «Εμβαδού» με τους μηχανικούς μαθηματικούς τύπους υπολογισμού του εμβαδού και τη μονάδα μέτρησης του εμβαδού.

Συγκρίνοντας λοιπόν το πρώτο ερώτημα του POST-TEST με το δεύτερο ερώτημα του PRE-TEST, μιας και πρόκειται για το ίδιο ερώτημα, συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές κατόπιν της διδακτικής παρέμβασης δεν συγχέουν πλέον την έννοια του «Εμβαδού» με έννοιες όπως η περίμετρος, το μέγεθος, ο όγκος και το μήκος ενός σχήματος, κάτι το οποίο έκαναν πριν τη διδακτική παρέμβαση. Αυτό ακριβώς σε συνδυασμό με το γεγονός ότι δεν υπήρξε κάποιος μαθητής που να μην ήταν σε θέση να απαντήσει στο πρώτο ερώτημα του POST-TEST, μας επιτρέπει να συμπεράνουμε πως η διδακτική παρέμβαση, που μεσολάβησε, δείχνει να συνέβαλε στη βελτίωση του βαθμού κατανόησης της έννοιας του «Εμβαδού» από τους μαθητές/τριες της τάξης συγκριτικά με το βαθμό κατανόησης της έννοιας αυτής από τους μαθητές/τριες πριν την διδακτική παρέμβαση, όπως προκύπτει από την ανάλυση των απαντήσεων του PRE-TEST.

Στη συνέχεια συγκρίνοντας τις απαντήσεις των μαθητών/τριών του δεύτερου ερωτήματος του POST-TEST με τις αντίστοιχες απαντήσεις των μαθητών/τριών του πέμπτου ερωτήματος του PRE-TEST, στα πλαίσια των οποίων οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν το μήκος της πλευράς και την περίμετρο ενός τετραγώνου με συγκεκριμένο εμβαδόν, διαπιστώνουμε ότι οι επιδόσεις των μαθητών στο αντίστοιχο ερώτημα του POST-TEST είναι σημαντικά καλύτερες. Αξίζει να σημειωθεί ότι 87% του δείγματός μας έδωσε αποδεκτές απαντήσεις στο σχετικό ερώτημα του POST-TEST. Στον αντίποδα, 35% του δείγματος έδωσε αποδεκτές απαντήσεις στο σχετικό ερώτημα του PRE-TEST. Αξίζει μάλιστα να σημειωθεί πως στην περίπτωση του ερωτήματος του POST-TEST, οι μαθητές προσπάθησαν να υπολογίσουν το μήκος της πλευράς και την περίμετρο του τετραγώνου σχεδιάζοντας το συγκεκριμένο τετράγωνο σε πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα που υπήρχε στα φύλλα εργασίας του POST-TEST και μετρώντας τις τετραγωνικές μονάδες του γεωπίνακα. Σε αντίθεση με την περίπτωση του αντίστοιχου ερωτήματος του PRE-TEST, όπου οι μαθητές προσπάθησαν να υπολογίσουν το μήκος της πλευράς και την περίμετρο του τετραγώνου εφαρμόζοντας με μηχανικό τρόπο τους μαθηματικούς τύπους, που έχουν αποστηθίσει, για τον υπολογισμό του εμβαδού και της περιμέτρου ενός τετραγώνου. Κάτι τέτοιο μας οδηγεί στον συμπέρασμα πως η διδακτική παρέμβαση που μεσολάβησε και αφορούσε τη διδασκαλία της έννοιας του «Εμβαδού» επίπεδων σχημάτων με τη χρήση του γεωπίνακα και την έμμεση εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος φαίνεται να συνέβαλε στην απόκτηση μαθησιακών εμπειριών που αφορούν τον υπολογισμό του εμβαδού γεωμετρικών σχημάτων χωρίς τη χρήση μαθηματικών τύπων.

Κατόπιν στα πλαίσια του τρίτου ερωτήματος του POST-TEST παρατηρούμε ότι οι μαθητές σημειώνουν υψηλότερες επιδόσεις στο σχεδιασμό ενός τετραγώνου με εμβαδόν 2 τ.εκ. συγκριτικά με τις επιδόσεις των μαθητών σε αντίστοιχο υπο-ερώτημα του έκτου ερωτήματος του PRE-TEST. Πιο συγκεκριμένα, έπειτα από τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές σε ποσοστό 74% σχεδίασαν σωστά ένα τετράγωνο με επιφάνεια 2 τ.εκ στον πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα, που υπήρχε στα φύλλα εργασίας τους. Σε αντίθεση με το ποσοστό των μαθητών (13%), που σχεδίασε σωστά ένα τετράγωνο με εμβαδόν 2 τ.εκ. σε ένα τετραγωνισμένο χαρτί, πριν τη διδακτική παρέμβαση. Στην περίπτωση του PRE-TEST, ελάχιστοι μαθητές κατόπιν διερεύνησης και διάφορων αποπειρών σχεδιασμού στο τετραγωνισμένο χαρτί, που είχαν στη διάθεσή τους, κατάφεραν τελικά να σχεδιάσουν ένα τετράγωνο με εμβαδόν 2 τ.εκ. Ωστόσο στην περίπτωση του POST-TEST η πλειοψηφία των μαθητών εφάρμοσε υποσυνείδητα το Πυθαγόρειο Θεώρημα και κατασκεύασε το σχήμα της «καρέκλας της νύφης» ή εφάρμοσε τη μέθοδο υποδιπλασιασμού της τετραγωνικής επιφάνειας με αποτέλεσμα να σχεδιάσουν ορθά ένα τετράγωνο με εμβαδόν 2 τ.εκ. Αυτό σε συνδυασμό με τις επιδόσεις των μαθητών και στα δύο τελευταία ερωτήματα του POST-TEST, όπου κλήθηκαν να σχεδιάσουν τετράγωνα με εμβαδόν 8 τ.εκ. και 10 τ.εκ. αντίστοιχα, αποδεικνύει πως η διδακτική παρέμβαση που μεσολάβησε δείχνει να συνέβαλε σημαντικά στη βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών γύρω από το σχεδιασμό τετραγώνων με μεγέθη επιφανειών τέτοια ώστε να μην διευκολύνει τους μαθητές η χρήση μαθηματικών τύπων για τον υπολογισμό των πλευρών αυτών των τετραγώνων.

Εξετάζοντας λοιπόν τις απαντήσεις των μαθητών στα ερωτήματα του POST-TEST, παρατηρούμε ότι κατόπιν της διδακτικής παρέμβασης οι μαθητές δείχνουν να απαγκιστρώνονται από τη μηχανική χρήση των μαθηματικών τύπων για τον υπολογισμό του εμβαδού γεωμετρικών σχημάτων. Και κατ’ επέκταση οι μαθητές μπορεί να είναι σε θέση να ξεπεράσουν τους περιορισμούς των μηχανικών μαθηματικών τύπων για τον υπολογισμό του εμβαδού, αξιοποιώντας τον γεωπίνακα και τη μέθοδο που υπονοεί την εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος για το σχεδιασμό τετραγωνικών επιφανειών.

Συνάμα παρατηρώντας πιο ολιστικά τις επιδόσεις των μαθητών και στα δύο τεστ, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι κατόπιν της διδακτικής παρέμβασης που σχεδιάσαμε, οι μαθητές φαίνεται να είναι σε θέση να ξεχωρίζουν την έννοια του «Εμβαδού» από την έννοια της «Περιμέτρου» των γεωμετρικών σχημάτων. Επίσης οι μαθητές δείχνουν ότι είναι σε θέση να χρησιμοποιούν άτυπες μονάδες μέτρησης του εμβαδού.

Συμπερασματικά θα μπορούσαμε να αναφέρουμε πως βάσει της συγκριτικής αντιπαράθεσης των αποτελεσμάτων του PRE-TEST με αυτά του POST-TEST, οι μαθητές δείχνουν να εμπέδωσαν τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού επίπεδων σχημάτων με τη χρήση του γεωπίνακα και τη μέθοδο της έμμεσης εφαρμογής του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI: ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΟΜΑΔΟΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Σύμφωνα με τα συγγράμματα «Διδακτικής Μεθοδολογίας» κάθε εκπαιδευτική διαδικασία πρέπει να ολοκληρώνεται με τη διαδικασία αξιολόγησης (Ματσαγγούρας, 2007). Συνεπώς η αξιολόγηση κατά τη διάρκεια και το πέρας της ομαδοκεντρικής διδασκαλίας είναι μία πολύ σημαντική διαδικασία, βάσει της οποίας ο εκπαιδευτικός μπορεί να οδηγηθεί σε ασφαλή συμπεράσματα σχετικά με τον τρόπο εργασίας των μαθητών και την αποτελεσματικότητα της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας. Οι παρατηρήσεις που κατέγραψε η εξωτερική παρατηρήτρια-εκπαιδευτικός, στα πλαίσια θεατής και μη συμμετοχικής παρατήρησης κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, αλλά και οι ηχογραφημένοι διάλογοι μεταξύ των μαθητών αποτέλεσαν πηγές συλλογής ερευνητικών δεδομένων και συνέβαλαν σημαντικά στην τελική ή αλλιώς αθροιστική αξιολόγηση της εκπαιδευτικής παρέμβασης που πραγματοποιήσαμε στα πλαίσια της έρευνάς μας. Μάλιστα το Πρωτόκολλο παρατήρησης (βλ. Παράρτημα), που είχε συνταχθεί αρχικά από την ερευνήτρια, κατεύθυνε την εξωτερική παρατηρήτρια ώστε να καταγράψει στοχευμένες παρατηρήσεις που αφορούσαν κυρίως την ομαδοσυνεργατική εργασία των μαθητών/τριών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης.

Στα πλαίσια της αξιολόγησης της αποτελεσματικότητας της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας, η εξωτερική παρατηρήτρια κατέγραψε ότι οι μαθητές έδειξαν μεγάλο ενδιαφέρον και ενθουσιασμό να συνεργαστούν και να συμμετέχουν σε δραστηριότητες που περιλαμβάνουν τη χρήση του γεωπίνακα. Μάλιστα παρατηρήθηκε μια έντονη επιθυμία από μέρους των μαθητών να ασχοληθούν με το συγκεκριμένο χειραπτικό υλικό και να διερευνήσουν τη χρήση του στα μαθηματικά, μιας και δεν τους είχε δοθεί ξανά η ευκαιρία να γνωρίσουν και να χρησιμοποιήσουν αυτό το χειραπτικό υλικό.

Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις της εξωτερικής παρατηρήτριας, κατά τη διάρκεια της ομαδικής εργασίας οι μαθητές συζητούσαν, αντάλλασσαν απόψεις και κατέληγαν σε συμπεράσματα. Φαίνεται λοιπόν πως η ομαδική εργασία των μαθητών και η χρήση ενός χειραπτικού υλικού, όπως ο γεωπίνακας, προώθησαν σημαντικά το διάλογο μεταξύ των μαθητών με σκοπό την ανταλλαγή ιδεών και την επίλυση δραστηριοτήτων-προβλημάτων. Συμπερασματικά υπήρχε άμεση διαπροσωπική επικοινωνία μεταξύ των μαθητών τόσο σε επίπεδο υπο-ομάδας όσο και σε επίπεδο ομάδας.

Επιπρόσθετα τα μέλη κάθε ομάδας φάνηκε να έχουν συλλογική αντίληψη και να αντιλαμβάνονται ότι συνεργάζονται για να ικανοποιήσουν κοινούς στόχους και ανάγκες. Κάτι τέτοιο αποδεικνύεται κατά τη διαδικασία ελέγχου και επιδιόρθωσης των απαντήσεων σε κάθε δραστηριότητα, όταν δηλαδή τα μέλη της κάθε υπο-ομάδας αντάλλασσαν τα φύλλα εργασίας τους με σκοπό να αξιολογήσουν τη προσπάθεια επίλυσης της δραστηριότητας των συμμαθητών τους που ανήκαν σε διαφορετική υπο-ομάδα από τη δική τους. Σε αυτή τη φάση λοιπόν, οι μαθητές δεν επέδειξαν καμία πρόθεση ανταγωνισμού και αρνητικού σχολιασμού, αντίθετα έδειξαν σημαντικό ενδιαφέρον ώστε οι συμμαθητές τους, που ανήκουν σε άλλη υπο-ομάδα, να ολοκληρώσουν επιτυχώς την κάθε δραστηριότητα με σκοπό τη συλλογική επιτυχία της ομάδας. Γι' αυτό το λόγο κατά τη φάση της διαδικασίας ελέγχου της κάθε δραστηριότητας έλαβαν χώρα εποικοδομητικοί διάλογοι μεταξύ των μαθητών με στόχο την παροχή επεξηγήσεων για την αποφυγή λαθών και παρανοήσεων σχετικών με την εκάστοτε δραστηριότητα.

Σε γενικές γραμμές κατά τη διάρκεια της ομαδικής εργασίας υπήρχε θετική αλληλεξάρτηση μεταξύ των μελών της κάθε ομάδας. Οι μαθητές έδειχναν να αναλαμβάνουν τόσο ατομική όσο και συλλογική ευθύνη κατά τη διεξαγωγή των ομαδικών δραστηριοτήτων, καθώς η ομαδοσυνεργατική μέθοδος TAI προωθεί τη συνεχή εναλλαγή ατομικής και συλλογικής μάθησης. Ωστόσο δεν έλλειψαν οι περιπτώσεις μαθητών που ανέλαβαν ρόλους, οι οποίοι δεν προωθούσαν τη μάθηση αλλά αντίθετα παρακώλυαν την συλλογική εργασία της ομάδας. Πιο συγκεκριμένα, σε μία ομάδα εργασίας παρατηρήθηκε μία μαθήτρια χαμηλού γνωστικού επίπεδου να αναλαμβάνει τον ρόλο του «τεμπέλη», καθώς επιδίωκε τακτικά να απέχει από το διάλογο και την ομαδική εργασία. Παρόλο βέβαια που οι συμμαθητές της, που ανήκαν στην ίδια υπο-ομάδα με τη συγκεκριμένη μαθήτρια, προσπάθησαν να της δώσουν έναν πιο ενεργό ρόλο μέσα στην ομάδα, η ίδια αρκούνταν απλά στο να καταγράφει τις απαντήσεις και τα συμπεράσματα των συμμαθητών της στο φύλλο εργασίας της.

Συνάμα, σε μια άλλη ομάδα εργασίας ένας μαθητής χαμηλού γνωστικού επιπέδου εμφάνιζε τον ρόλο του «απόμακρου» μιας και ήταν ιδιαίτερα περιθωριοποιημένος από την ομάδα του. Σε αυτήν την περίπτωση, η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός προσπάθησε επανειλημμένα να παρακινήσει τα υπόλοιπα μέλη της υπο-ομάδας ώστε να συμπεριλάβουν τον συμμαθητή τους στην εργασία τους. Ωστόσο κάτι τέτοιο ήταν αρκετά δύσκολο εφόσον ο συγκεκριμένος μαθητής διέθετε ελάχιστα κίνητρα μάθησης και ήταν περιθωριοποιημένος από το σύνολο της τάξης. Τέλος σε άλλη ομάδα εργασίας ένας μαθητής μέτριου γνωστικού επιπέδου αποτελούσε το λεγόμενο «πειραχτήρι», καθώς εμπόδιζε τους συμμαθητές του να συγκεντρωθούν στην εργασία και επιχειρούσε συχνά να οδηγήσει τη συζήτηση μεταξύ των συμμαθητών του σε θέματα άσχετα με την εργασία τους. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις μαθητών, η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός επιχειρούσε έμμεσα να προωθήσει την ενεργητική εμπλοκή αυτών των μαθητών στη διαδικασία μάθησης. Μολονότι οι ισορροπίες μεταξύ των μαθητών, που είχαν δημιουργηθεί από καιρό στη συγκεκριμένη τάξη, ήταν δύσκολο έως απίθανο, να τροποποιηθούν στα πλαίσια μιας διδακτικής παρέμβασης τεσσάρων διδακτικών ωρών.

Η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός συντόνιζε τη συζήτηση των μαθητών μέσω καθοδηγητικών ερωτημάτων, ωστόσο σε κάποιες περιπτώσεις ο διάλογος δράσης μεταξύ των μαθητών για την επίλυση της εκάστοτε δραστηριότητας ξέφευγε από το υπό μελέτη θέμα και κατέληγε σε άσχετα με την εργασία θέματα, με αποτέλεσμα έναν αφηρημένο διάλογο. Τότε η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός δραστηριοποιήθηκε ώστε να επαναφέρει τους μαθητές στη συζήτηση σχετικά με την επίλυση της εκάστοτε δραστηριότητας.

Η ανομοιογενής σύνθεση των ομάδων εργασίας αλλά και ο αριθμός των μελών κάθε ομάδας και υπο-ομάδας φάνηκε ότι συνέβαλαν στην προώθηση της μαθησιακής διαδικασίας. Πιο συγκεκριμένα ο αριθμός των μελών σε κάθε υπο-ομάδα και ομάδα εργασίας ήταν ιδανικός σε σχέση με τον τύπο των μαθηματικών δραστηριοτήτων που καλούνταν οι μαθητές να επεξεργαστούν. Όσον αφορά το βαθμό ετερογένειας των ομάδων εργασίας, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις της εξωτερικής παρατηρήτριας χρειάζεται να αναφέρουμε ότι η ποικιλία του γνωστικού επιπέδου των μαθητών εντός των υπο-ομάδων φάνηκε ότι συνέβαλε στην προώθηση της ενεργού εμπλοκής και μάθησης όλων των μαθητών αλλά και στον καλύτερο δυνατό επιμερισμό των ρόλων και των αρμοδιοτήτων των μελών κάθε υπο-ομάδας. Ειδικότερα οι πιο «αδύναμοι» μαθητές συμμετείχαν ικανοποιητικά στη διαδικασία μάθησης, έδειξαν ενδιαφέρον και σημείωσαν σημαντική βελτίωση στις επιδόσεις τους. Μάλιστα το γεγονός ότι διαμορφώθηκε μία ομοιογενής υπο-ομάδα εργασίας που περιελάμβανε δύο μαθητές που ανήκαν στο πιο υψηλό γνωστικό επίπεδο της τάξης, αποτέλεσε μία πρακτική διαφοροποίησης της διδασκαλίας σύμφωνα με την οποία ο ρυθμός μάθησης και οι γνωστικές ικανότητες των μαθητών λαμβάνονται υπόψιν σε μια προσπάθεια συνεχούς παροχής κινήτρων μάθησης και εργασίας. Τέλος ο χρόνος, που ορίστηκε από την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό για την διεκπεραίωση της εκάστοτε δραστηριότητας διαπιστώθηκε επαρκής με βάση το βαθμό ετερογένειας και τον αριθμό των μελών της κάθε ομάδας.

Ο τρόπος οργάνωσης των ομάδων εργασίας πιθανόν προώθησε την αποκέντρωση της εξουσίας εντός των ομάδων και άρα την απουσία περιστατικών εκδήλωσης αρχηγικής συμπεριφοράς. Μεταξύ των μελών κάθε υπο-ομάδας υπήρχε ομαδικό πνεύμα, φιλική διάθεση και ετοιμότητα και επιθυμία να μοιραστούν τις ιδέες τους με τα μέλη της άλλης υπο-ομάδας, που βρισκόταν στην ομάδα τους. Η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός από τη μεριά της μεριμνούσε για τη διατήρηση του ομαδοσυνεργατικού πνεύματος, κατά της διάρκεια τη συνεργατικής μάθησης. Εν ολίγοις δεν διαμορφώθηκε κλίμα έντονου ανταγωνισμού μεταξύ των διαφορετικών ομάδων εργασίας ως προς την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων. Αντιθέτως στις περισσότερες ομάδες οι μαθητές κατόρθωσαν να συνεργαστούν επιτυχώς για την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων.

Εφόσον οι μαθητές ολοκλήρωσαν επιτυχώς τις δραστηριότητές τους, ο εκπαιδευτικός αξιολόγησε την εργασία κάθε ομάδας με σκοπό να της αποδώσει την τελική ανταμοιβή της μέσα από τίτλους διάκρισης όπως «απίθανη ομάδα», «καλή ομάδα» και «αδύναμη ομάδα». Σύμφωνα με τις εκτιμήσεις της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού, από τις πέντε ομάδες εργασίας που υπήρχαν συνολικά στην τάξη, δύο ομάδες έλαβαν τον τίτλο διάκρισης «απίθανη ομάδα», άλλες δύο ομάδες έλαβαν τον τίτλο «καλή ομάδα» και μία ομάδα έλαβε τον τίτλο «αδύναμη ομάδα».

Εν κατακλείδι οι μαθητές μέσω της ομαδικής εργασίας τους κατάφεραν να εκπληρώσουν τους μαθησιακούς στόχους που τέθηκαν αρχικά από την ερευνήτρια. Αυτό αποδεικνύεται και μέσα από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων των PRE-TEST και POST-TEST. Συγκρίνοντας λοιπόν τα αποτελέσματα των δύο τεστ, φαίνεται ότι οι μαθητές σημείωσαν υψηλότερες ακαδημαϊκές επιδόσεις γύρω από την μαθηματική έννοια της μέτρησης του εμβαδού, κατόπιν της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας που τους παραχωρήθηκε. Κάτι τέτοιο μπορεί να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι η διδακτική αξιοποίηση της τεχνικής της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας μπορεί να συμβάλλει στη βελτίωση των ακαδημαϊκών επιδόσεων των μαθητών γύρω από τη μαθηματική έννοια της μέτρησης του εμβαδού. Όπως επίσης μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η διδακτική αξιοποίηση της τεχνικής της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας μπορεί να προωθήσει την διερευνητική ικανότητα και την ικανότητα διατύπωσης συμπερασμάτων των μαθητών στα πλαίσια της διδασκαλίας της μέτρησης του εμβαδού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Μελετώντας διάφορες έρευνες από τη διεθνή βιβλιογραφία διαπιστώνουμε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες γύρω από τη γεωμετρική έννοια της μέτρησης του Εμβαδού, όπως επίσης ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών σχηματίζει λανθασμένες ιδέες και παρανοήσεις γύρω από αυτή την έννοια. Κάτι τέτοιο, σύμφωνα με έρευνες, οφείλεται στην επιφανειακή κατανόηση της έννοιας της μέτρησης του Εμβαδού σε συνδυασμό με τη παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας χρήσης μαθηματικών κανόνων και νορμών στα πλαίσια του υπολογισμού του εμβαδού επίπεδων σχημάτων, που υιοθετείται από τους εκπαιδευτικούς (Baturo & Nason, 1996· Hershkowitz, 2014, p.p. 542-547· Sisman & Aksu, 2016). Μάλιστα η χρήση μαθηματικών κανόνων από τους μαθητές για τη μέτρηση του εμβαδού επίπεδων σχημάτων ενέχει σημαντικούς περιορισμούς, όπως για παράδειγμα η δυσκολία να σχεδιάσουν ένα τετράγωνο με εμβαδόν 2 τ.εκ. βασιζόμενοι στο μαθηματικό τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού του τετραγώνου. Τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών σε συνδυασμό με τους περιορισμούς που υπονοεί η διδασκαλία των μαθηματικών κανόνων για τον υπολογισμό του εμβαδού επίπεδων σχημάτων με μηχανικό τρόπο μας ώθησε στο σχεδιασμό και την ερευνητική εφαρμογή της παραπάνω διδακτικής παρέμβασης.

Με στόχο λοιπόν να διαμορφώσουμε μία διαφορετική διδακτική προσέγγιση από την παραδοσιακή, γύρω από τη θεματική ενότητα της μέτρησης του εμβαδού στο δημοτικό σχολείο, δοκιμάσαμε να συνδυάσουμε δύο διδακτικές τεχνικές, τη διδακτική αξιοποίηση των χειραπτικών εργαλείων και τη διδακτική εφαρμογή της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας, προωθώντας την έμμεση εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος για τον υπολογισμό της επιφάνειας επίπεδων σχημάτων. Έτσι λοιπόν στα πλαίσια της ερευνητικής εφαρμογής αυτής της διδακτικής προσέγγισης παρατηρήσαμε τους μαθητές, που αποτέλεσαν το δείγμα της έρευνάς μας, να υπολογίζουν το εμβαδόν επίπεδων σχημάτων και να σχηματίζουν σχήματα με συγκεκριμένη επιφάνεια εφαρμόζοντας ασυναίσθητα την απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος και χωρίς να έχουν την ανάγκη χρήσης μαθηματικών κανόνων, που έχουν αποστηθίσει μηχανικά. Δεδομένου ότι η αποστήθιση αυτών των μηχανικών μαθηματικών τύπων δεν βοηθά τους μαθητές να αντιλαμβάνονται τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες που υποβόσκουν πίσω από αυτούς, γίνεται σαφές ότι μια τέτοια διδακτική προσέγγιση, όπως αυτή που δοκιμάστηκε ερευνητικά, ενθαρρύνει τους μαθητές να απαγκιστρωθούν από τη χρήση αυτών των τύπων.

Συλλήβδην όπως προκύπτει από τη συγκριτική αντιπαράθεση των αποτελεσμάτων των δύο τεστ διαγνωστικής και τελικής αξιολόγησης (PRE-TEST και POST-TEST), η διδακτική παρέμβαση που εφαρμόσαμε δείχνει να συμβάλλει στη βελτίωση των ακαδημαϊκών επιδόσεων γύρω από τη θεματική ενότητα της μέτρησης του εμβαδού επίπεδων σχημάτων. Βάσει λοιπόν των αποτελεσμάτων της έρευνας που διεξήγαμε μπορούμε να συμπεράνουμε πως ο βαθμός κατανόησης της έννοιας της μέτρησης του εμβαδού φαίνεται να αυξάνεται στους μαθητές της ΣΤ’ δημοτικού όταν η διδασκαλία της συγκεκριμένης θεματικής περιλαμβάνει την εμβαδική προσέγγιση του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Συνάμα ο βαθμός κατανόησης της έννοιας της μέτρησης του εμβαδού φαίνεται να αυξάνεται στους μαθητές της ΣΤ’ δημοτικού όταν αξιοποιείται διδακτικά ο γεωπίνακας, ως χειραπτικό εργαλείο μάθησης. Τέλος η διδακτική αξιοποίηση της τεχνικής της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας φαίνεται να συμβάλλει στη βελτίωση των ακαδημαϊκών επιδόσεων των μαθητών της ΣΤ’ δημοτικού γύρω από τη θεματική ενότητα της μέτρησης του εμβαδού.

Αξίζει να σημειωθεί ότι παράμετροι όπως ο ελάχιστος χρόνος διεξαγωγής της διδακτικής μας παρέμβασης και ο μικρός αριθμός του δείγματος της έρευνας δε μας επιτρέπουν να διατυπώσουμε γενικεύσεις, όπως αυτές προκύπτουν από τα συμπεράσματα της έρευνάς μας. Ωστόσο θεωρούμε πως η έρευνά μας μπορεί να αποτελέσει αφορμή για περαιτέρω διερεύνηση ζητημάτων και ερευνητικών ερωτημάτων που αφορούν τη διδακτική προσέγγιση της μαθηματικής έννοιας της μέτρησης του εμβαδού στο δημοτικό σχολείο συνδράμοντας το έργο της εκπαιδευτικής κοινότητας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση

Battista, M. (1982). Understanding Area and Area Formulas. *The Mathematics Teacher, 75*, (5), 362-368, 387.

Baturo, A. & Nason, R. (1996). Student teachers’ subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics, 31*, (3), 235-268.

Capar, G. & Tarim, K. (2015). Efficacy of the Cooperative Learning Method on Mathematics Achievement and Attitude: A Meta-Analysis Research. *Educational Sciences: Theory & Practice, 15*, (2), 553-559. Retrieved on 9 January, 2019 from https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1060189.pdf

Clements, D. H. & McMillen, S. (1996). Rethinking “Concrete” Manipulatives. *Teaching Children Mathematics, 2*, (5), 270-279.

Davidson, N. (1985). Small-Group Learning and Teaching in Mathematics: A Selective Review of the Research. In R. Slavin, S. Sharan, S. Kagan, R. Hertz-Lazarowitz, C. Webb, R. Schmuck (Eds), *Learning to Cooperate, Cooperating to Learn* (pp. 211-230). Boston: Springer.

Davidson, N. & Kroll, D. L. (1991). An Overview of Research on Cooperative Learning Related to Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, (5), 362-365.

Fielker, D. S. (1979). Strategies for teaching geometry to younger children. *Educational Studies in Mathematics, 10,* (1), 85-133.

Hershkowitz, R. (2014). Shape and Space – Geometry Teaching and Learning. In S. Lerman (Eds.). *Encyclopedia of Mathematics Education*, (pp. 542-547). Dordrecht: Springer.

Kaldi, S., Filippatou, D. & Anthopoulou, B. (2013). The effectiveness of structured co-operative teaching and learning in Greek primary school classrooms. *Education 3-13: International Journal of Primary, Elementary and Early Years Education, 42*, (6), 621-636. doi: 10.1080/03004279.2012.752023

Lahann, P. & Lambdin, D. V. (2014). Collaborative Learning in Mathematics Education. In S. Lerman (Eds.). *Encyclopedia of Mathematics Education*, (pp. 75-76). Dordrecht: Springer.

Leikin, R. & Zaslavsky, O. (1997). Facilitating Student Interactions in Mathematics in a Cooperative Learning Setting. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, (3), 331-354.

Leikin, R. & Zaslavsky, O. (1999). Cooperative Learning in Mathematics. *The Mathematics Teacher, 92*, (3), 240-246.

Meira, L. (1998). Making Sense of Instructional Devices: The Emergence of Transparency in Mathematical Activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*, (2), 121-142.

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative Research: A Guide to Design and Implementation: Revised and Expanded from Qualitative Research and Case Study Applications in Education* (2th ed.). San Francisco: John Wiley & Sons.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47*, (2), 175-197.

Murphy, C. (2012). The role of subject knowledge in primary prospective teachers' approaches to teaching the topic of area. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, (3), 187-206.

Scandrett, H. (2008). Using Geoboards in Primary Mathematics. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *13*, (2), 29-32. Retrieved on 5 January, 2019 from https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ802704.pdf

Scavo, T. (29 August 1995). Geoboards in the Classroom. *The Math Forum at NCTM*. Retrieved on 5 January, 2019 from http://mathforum.org/trscavo/geoboards.pdf

Szendrei, J. (1996). Concrete Materials in the Classroom. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 411-434). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Slavin, R. E., Madden, N. A. & Leavey, M. (1984). Effects of Team Assisted Individualization on the Mathematics Achievement of Academically Handicapped and Nonhandicapped Students. *Journal of Educational Psychology*, *76*, (5), 813-819.

Slavin, R. E. (1985). An Introduction to Cooperative Learning Research. In R. Slavin, S. Sharan, S. Kagan, R. Hertz-Lazarowitz, C. Webb, R. Schmuck (Eds), *Learning to Cooperate, Cooperating to Learn* (pp. 5-15). Boston: Springer.

Slavin, R. E. (1985). Team-Assisted Individualization: Combining Cooperative Learning and Individualized Instruction in Mathematics. In R. Slavin, S. Sharan, S. Kagan, R. Hertz-Lazarowitz, C. Webb, R. Schmuck (Eds), *Learning to Cooperate, Cooperating to Learn* (pp. 177-209). Boston: Springer.

Sowell, E. J. (1989). Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, (5), 498-505.

Tan Sisman, G. & Aksu, M. (2016). A Study on Sixth Grade Students' Misconceptions and Errors in Spatial Measurement: Length, Area, and Volume. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*, (7), 1293-1319.

Tarim, K. & Akdeniz, F. (2008). The effects of cooperative learning on Turkish elementary students' mathematics achievement and attitude towards mathematics using TAI and STAD methods. *Educational Studies in Mathematics, 67*, (1), 77-91. doi: 10.1007/s10649-007-9088-y

Webb, N. M. (1985). Student Interaction and Learning in Small Groups: A Research Summary. In R. Slavin, S. Sharan, S. Kagan, R. Hertz-Lazarowitz, C. Webb, R. Schmuck (Eds), *Learning to Cooperate, Cooperating to Learn* (pp. 147-172). Boston: Springer.

Ελληνόγλωσση

Baudrit, A. (2007). *Καινοτόμες προσεγγίσεις στις Επιστήμες της Αγωγής: Η Ομαδοσυνεργατική Μάθηση*. Κ. Αγγελάκος (επιμ.). (Ε. Κρομμύδα, μεταφρ.). Αθήνα: Κέδρος. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 2005).

Cohen, L. & Manion, L. (1994). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας*. (Χ. Μητσοπούλου & Μ. Φιλοπούλου, μεταφρ.). Αθήνα: ΜΕΤΑΙΧΜΙΟ. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1994).

Ελληνική Δημοκρατία. Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.)

Μαθηματικών για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ. Ανακτήθηκε 13 Ιανουαρίου 2019 από http://www.pi-schools.gr/programs/depps/

Ίσαρη, Φ. & Πουρκός, Μ. (2015). *Ποιοτική Μεθοδολογία Έρευνας: Εφαρμογές στην Ψυχολογία και την Εκπαίδευση*. Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. Ανακτήθηκε 12 Ιανουαρίου 2019 από http://hdl.handle.net/11419/5826

Καλογεροπούλου, Α., Γκίκας, Μ., Καραγιαννάκης, Δ. & Λάμπρου Μ. (1992). *Αγγλοελληνικό λεξικό μαθηματικών όρων*. Αθήνα: Τροχαλία.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών* (5η έκδ.). Αθήνα: Εκδόσεις ΤΟΠΟΣ.

Ματσαγγούρας, Η. Γ. (2007). *Θεωρία και Πράξη της Διδασκαλίας: Στρατηγικές Διδασκαλίας: Η Κριτική Σκέψη στη Διδακτική Πράξη* (5η έκδ.) (Τόμ. Β). Αθήνα: Gutenberg.

Van de Walle, A. J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Εξελικτική Διδασκαλία*. Τ. Α. Τριανταφυλλίδης (επιμ.). (Α. Αλεξανδροπούλου & Β. Κομπορόζος, μεταφρ.). Αθήνα: τυπωθήτω – ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΑΡΔΑΝΟΣ. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 2001).

Χατζηκυριάκου, Κ. (2002). Η ιστορία στο πυθαγόρειο θεώρημα. Σε Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Πρακτικά 1ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών* (σ. 81-91). Θεσσαλονίκη, 8-9 Μαρτίου 2002.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

PRE-TEST

Φύλλο Εργασίας 1

Κάρτες 3ης δραστηριότητας – Φύλλο Εργασίας 1

Φύλλο Εργασίας 2

Φύλλο Εργασίας 3

POST-TEST

Πρωτόκολλο παρατήρησης

PRE-TEST

Ονοματεπώνυμο:...Ημερομηνία:......................

Αφού διαβάσεις προσεκτικά τα παρακάτω ερωτήματα, προσπάθησε να απαντήσεις, φέρνοντας στο μυαλό σου ό,τι γνωρίζεις για το εμβαδόν των γεωμετρικών σχημάτων.

☺ Ποια είναι η μονάδα μέτρησης του μήκους;

____

☺ Τι ονομάζουμε «εμβαδόν» ενός γεωμετρικού σχήματος;

____

____

____

☺ Ποια είναι η μονάδα μέτρησης του εμβαδού;

____

☺ Έχω ένα τετράγωνο με πλευρά 2 εκ.

α) Πόσο είναι το εμβαδόν του;

____

β) Πόση είναι η περίμετρός του;

____

☺ Έχω ένα τετράγωνο που το εμβαδόν του είναι 9 τ.εκ.

α) Πόσο είναι το μήκος κάθε πλευράς του;

____

β) Πόση είναι η περίμετρός του;

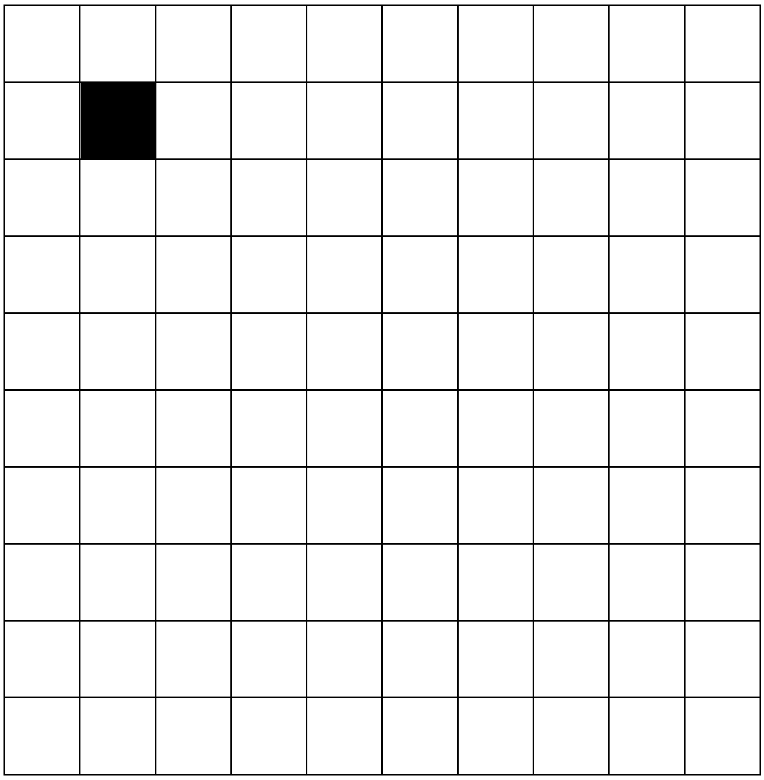
____

☺ Στο τετραγωνισμένο χαρτί που σου δίνεται παρακάτω, το μαύρο τετραγωνάκι έχει εμβαδόν 1 τ.εκ.

Προσπάθησε να σχεδιάσεις ένα τετράγωνο

α) που να έχει εμβαδόν 4 τ.εκ.

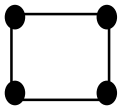
β) που να έχει εμβαδόν 2 τ.εκ.



Φύλλο εργασίας 1

Ονοματεπώνυμο:…………………………..……………….Ημερομηνία:…………………

☺ ***<u>Δραστηριότητα 1:</u>*** *«Καλύπτοντας επιφάνειες στον γεωπίνακα»*

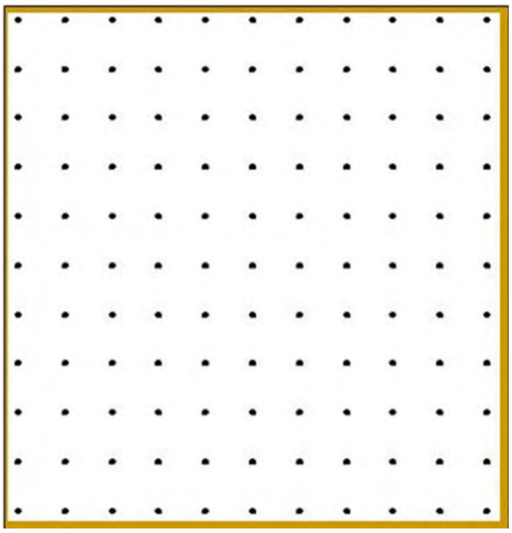
Θυμήσου ότι κάθε τετραγωνική  σε ένα γεωπίνακα είναι μία μονάδα.

α) Υπολόγισε από πόσες τετραγωνικές μονάδες αποτελείται ο γεωπίνακας που έχεις μπροστά σου.

____

____

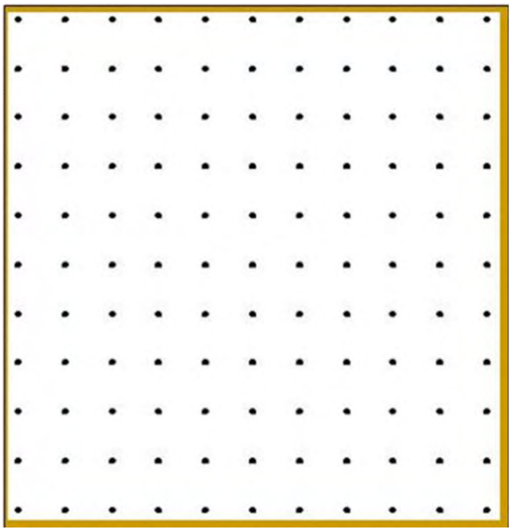
β) Με τα λαστιχάκια που έχεις μπροστά σου, σχεδίασε στον γεωπίνακα ένα σχήμα που να καλύπτει επιφάνεια ίση με 2 τετραγωνικές μονάδες. Έπειτα με τη βοήθεια του χάρακά σου σχεδίασε αυτό το σχήμα κι εδώ.



Ποιο γεωμετρικό σχήμα σχεδίασες;

____

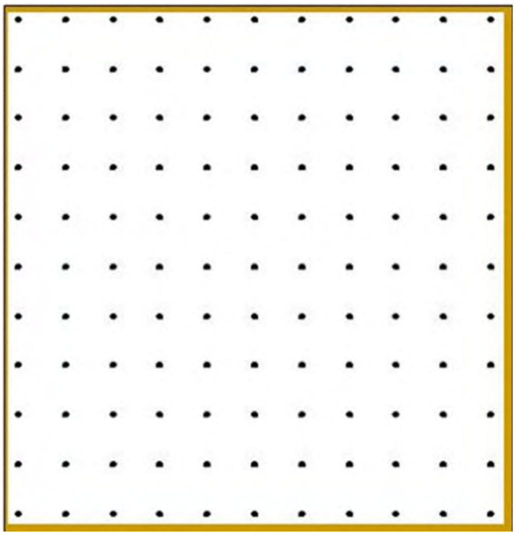
γ) Τώρα προσπάθησε να σχεδιάσεις ένα σχήμα που να καλύπτει επιφάνεια ίση με μισή τετραγωνική μονάδα και έπειτα μετέφερε το σχήμα κι εδώ.



Ποιο γεωμετρικό σχήμα σχεδίασες;

____

δ) Τώρα προσπάθησε να σχεδιάσεις δύο διαφορετικά σχήματα που καθένα να καλύπτει επιφάνεια ίση με μία τετραγωνική μονάδα αλλά ούτε το ένα ούτε το άλλο να είναι τετράγωνα.



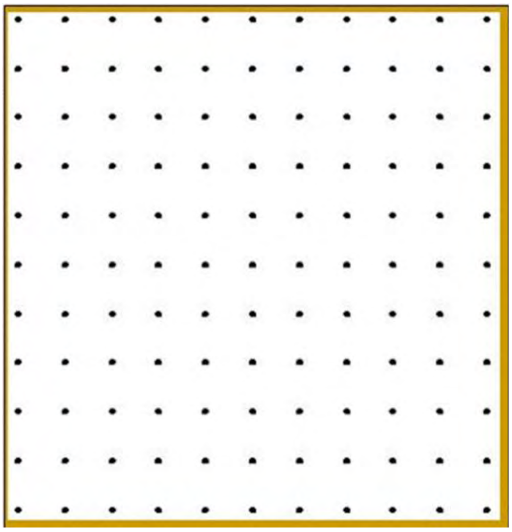
Ποια γεωμετρικά σχήματα σχεδίασες;

____

____

____

ε) Τέλος, φτιάξε δύο σχήματα που το ένα να καλύπτει επιφάνεια ίση με 3 τετραγωνικές μονάδες και το άλλο να καλύπτει επιφάνεια ίση με 5 τετραγωνικές μονάδες και έπειτα μετέφερε τα σχήματα κι εδώ.



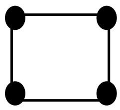
Ποια γεωμετρικά σχήματα σχεδίασες;

____

____

____

☞ Θυμήσου ότι η απόσταση της μίας κουκίδας από την άλλη στον γεωπίνακα είναι 1 εκατοστό.

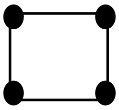
☞ Άρα το εμβαδόν κάθε τετραγωνικής  μονάδας του γεωπίνακα είναι: ………………………………………………

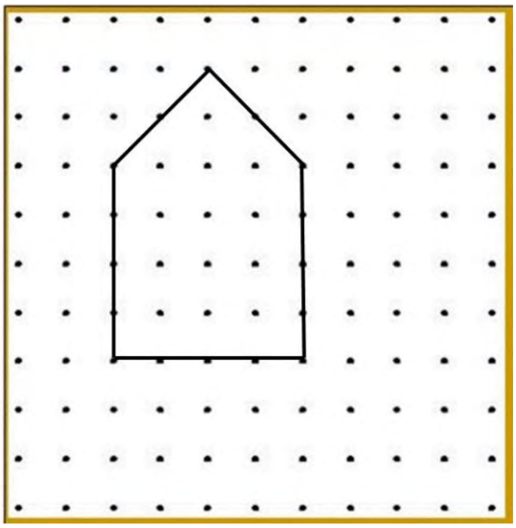
☺ ***Δραστηριότητα 2:*** *«Τα χωράφια του κυρ Λάμπρου»*

Ο κυρ Λάμπρος αγόρασε δύο χωράφια για να φυτέψει πορτοκαλιές και λεμονιές. Θέλει να μετρήσει τα εμβαδά τους για να δει πόσες πορτοκαλιές και πόσες λεμονιές θα φυτέψει στο κάθε χωράφι.

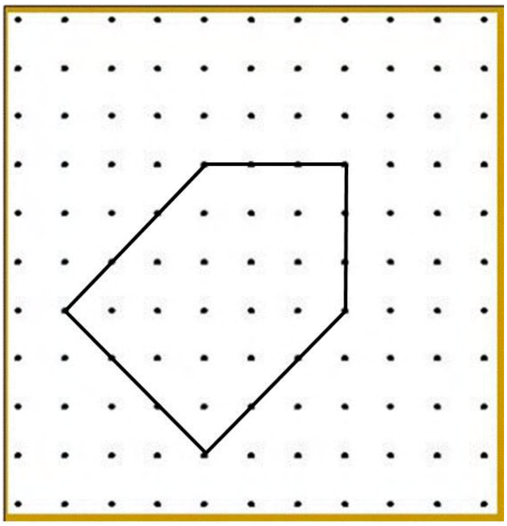
α) Στους παρακάτω πίνακες αναπαράστασης φαίνονται τα δύο χωράφια του κυρ Λάμπρου. Χρησιμοποιώντας τα πολύχρωμα λαστιχάκια, συνεργαστείτε με την ομάδα σας και προσπαθήστε να σχηματίσετε τα χωράφια αυτά στον γεωπίνακα που έχετε μπροστά σας.

☞ Τι θα κάνετε για να τον βοηθήσετε να μετρήσει τα χωράφια του;

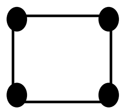
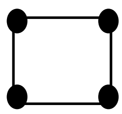
☞ Θυμηθείτε ότι το  είναι μία τετραγωνική μονάδα.



Χωράφι με πορτοκαλιές



Χωράφι με λεμονιές

- Το χωράφι με τις πορτοκαλιές έχει εμβαδόν ________________ 
  ή αλλιώς __________τ.εκ.
- Το χωράφι με τις λεμονιές έχει εμβαδόν ________________ 
  ή αλλιώς __________τ.εκ.

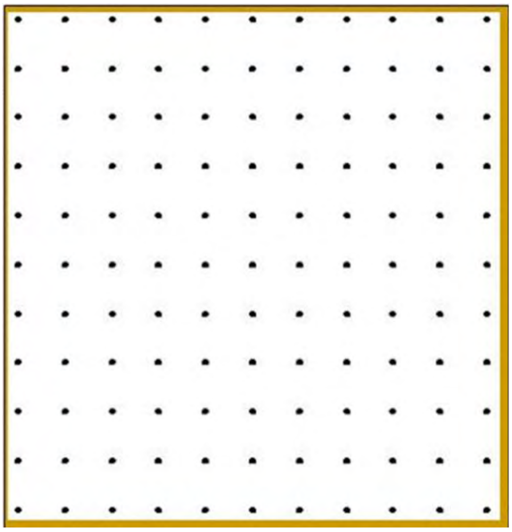
☺ ***Δραστηριότητα 3:*** *«Τα οικόπεδά μας»*

Οι φίλοι σου κι εσύ μόλις αγοράσατε ο καθένας το δικό του οικόπεδο για να χτίσετε το σπίτι των ονείρων σας. Ο πολιτικός μηχανικός σας ετοίμασε τα σχέδια των οικοπέδων σας και σας τα παρέδωσε. Βέβαια ο μηχανικός παρέλειψε να σας αναφέρει το εμβαδόν του κάθε οικοπέδου…

α) Προσπαθήστε να υπολογίσετε τα εμβαδά των οικοπέδων σας και να τα συγκρίνετε.

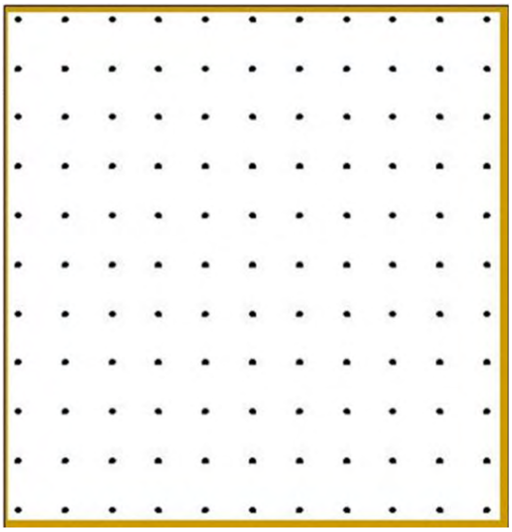
- ☞ Για να διευκολυνθείτε, συνεργαστείτε με την ομάδα σας και μεταφέρετε τα παράξενα σχέδια των οικοπέδων από τις κάρτες που σας δόθηκαν στον γεωπίνακα που έχετε μπροστά σας, χρησιμοποιώντας τα χρωματιστά λαστιχάκια.

- ☞ Έπειτα μεταφέρετε τα σχέδιά σας και στους παρακάτω πίνακες αναπαράστασης του γεωπίνακα.



Οικόπεδο ____

(όνομα ιδιοκτήτη:_______________)



Οικόπεδο ____

(όνομα ιδιοκτήτη:_______________)

Οικόπεδο	**Εμβαδόν**

Ποιος έχει το μεγαλύτερο οικόπεδο;

____

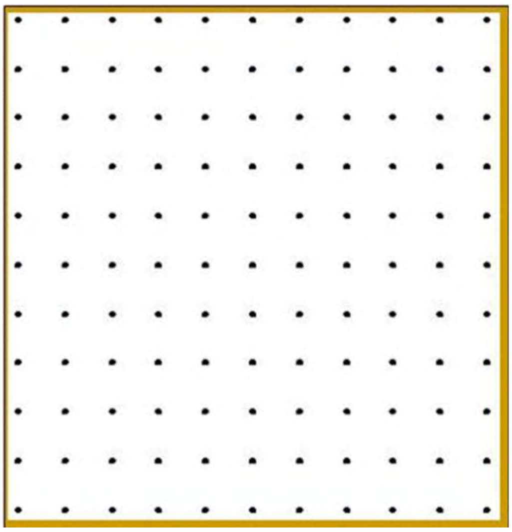
Φύλλο εργασίας 2

Ονοματεπώνυμο:……………………………..……………Ημερομηνία:…………………

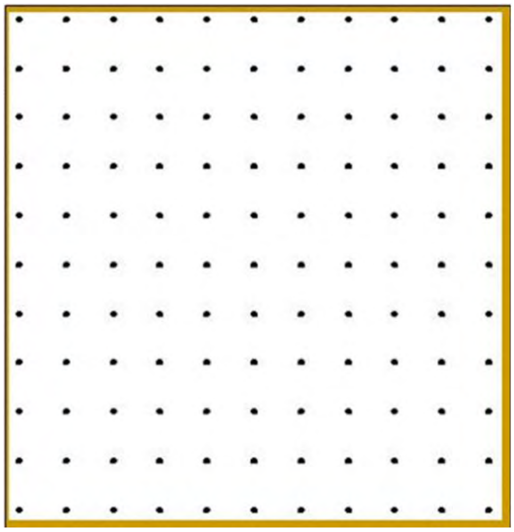
☺ ***<u>Δραστηριότητα 1:</u>*** *«Τα τετράγωνα»*

Συνεργαστείτε και κάντε δοκιμές με τα λαστιχάκια ώστε να φτιάξετε στον γεωπίνακα τέσσερα τετράγωνα με διαφορετικό εμβαδόν το καθένα.

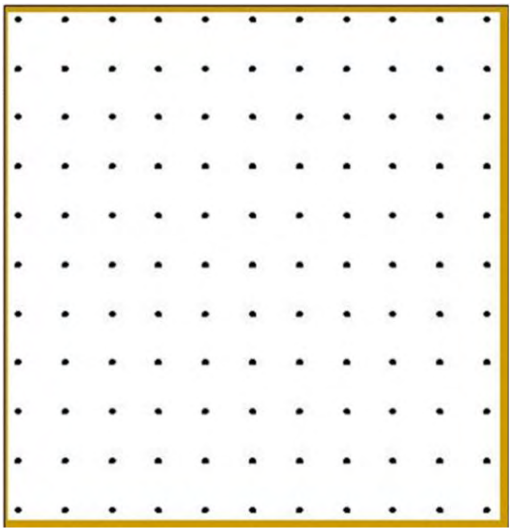
α) Μεταφέρετε τα τετράγωνα που σχηματίσατε στους παρακάτω πίνακες αναπαράστασης του γεωπίνακα.

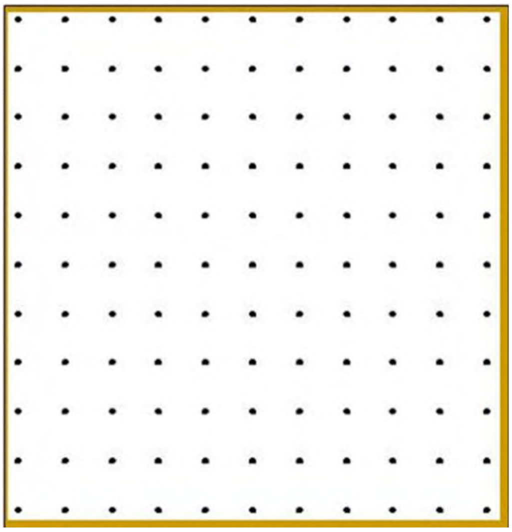


Τετράγωνο 1



Τετράγωνο 2





Τετράγωνο 3

Τετράγωνο 4

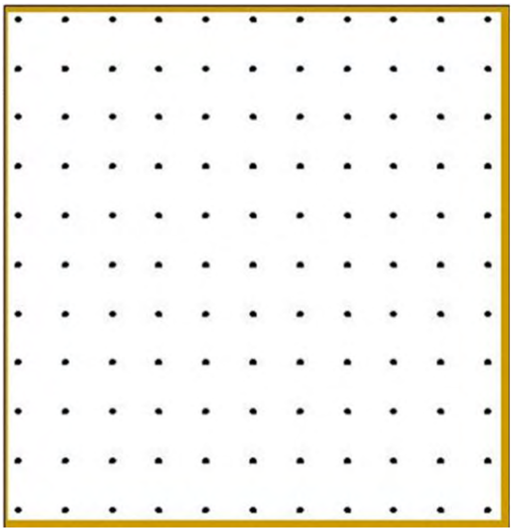
β) Συμπλήρωσε στον πίνακα το μήκος κάθε πλευράς και το εμβαδόν για κάθε τετράγωνο που φτιάξατε.

	Μήκος πλευράς	Εμβαδόν
Τετράγωνο 1		
Τετράγωνο 2		
Τετράγωνο 3		
Τετράγωνο 4		

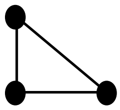
γ) Τι παρατηρείς; Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στα μήκη των πλευρών και τα εμβαδά των τετραγώνων;

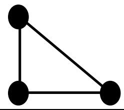
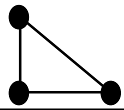
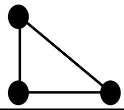
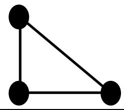
☺ ***Δραστηριότητα 2:*** *«Το τετράγωνο με εμβαδόν 2 στον γεωπίνακα (α' τρόπος κατασκευής)»*

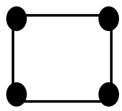
α) Με τη βοήθεια του συμμαθητή σου, σχηματίστε στον γεωπίνακα που έχετε μπροστά σας, ένα ορθογώνιο τρίγωνο με το μικρότερο εμβαδόν που μπορεί να έχει στον γεωπίνακα. Έπειτα σχηματίστε τρία τετράγωνα σε κάθε πλευρά αυτού του τριγώνου. Δηλαδή κάθε τετράγωνο θα πρέπει να έχει για πλευρά μια πλευρά του τριγώνου. Τέλος, μεταφέρετε τα σχήματα αυτά στον παρακάτω πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα.



β) Χρησιμοποιώντας τα λαστιχάκια, καλύψτε την επιφάνεια των τριών αυτών τετραγώνων σχηματίζοντας ορθογώνια τρίγωνα, με μέγεθος όσο και το αρχικό τρίγωνο που έχετε κατασκευάσει.

☞ *Με πόσες μισές τετραγωνικές μονάδες*  *ισούται το εμβαδόν κάθε τετραγώνου;*
Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα.

	Εμβαδόν (υπολογισμός σε μισές τετραγωνικές μονάδες)
Τετράγωνο 1 (με πλευρά την 1η κάθετη πλευρά του ορθ. τριγώνου)	
Τετράγωνο 2 (με πλευρά τη 2η κάθετη πλευρά του ορθ. τριγώνου)	
Τετράγωνα 1 + 2 (με πλευρές τις κάθετες πλευρές του ορθ. τριγώνου)	
Τετράγωνο 3 (με πλευρά τη μεγαλύτερη πλευρά του ορθ. τριγώνου)	

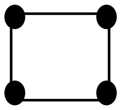
γ) Με πόσες τετραγωνικές μονάδες  ισούται το εμβαδόν του τετραγώνου της μεγαλύτερης πλευράς του αρχικού τριγώνου;

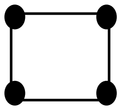
____
____

δ) Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα που συμπλήρωσες, σε ποιο συμπέρασμα καταλήγεις συγκρίνοντας τα εμβαδά των τετραγώνων αυτών;

____
____
____
____

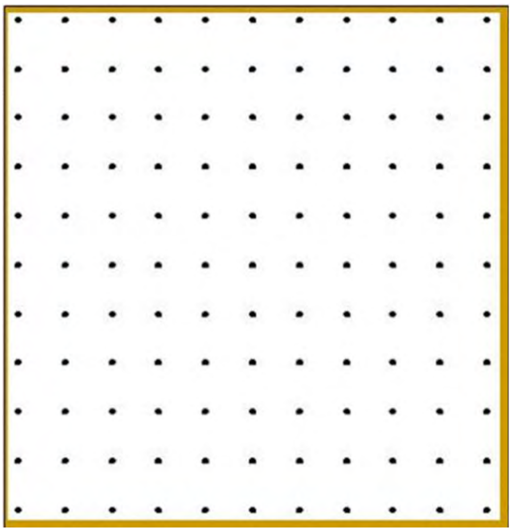
☺ ***Δραστηριότητα 3:*** *«Το τετράγωνο με εμβαδόν 2 στον γεωπίνακα (β' τρόπος κατασκευής)»*

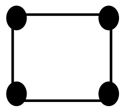
☞ Με τη βοήθεια του συμμαθητή σου, σχηματίστε στον γεωπίνακα που έχετε μπροστά σας ένα <u>τετράγωνο</u> με εμβαδόν <u>4 τετραγωνικές μονάδες</u> 

☞ Έπειτα χρησιμοποιώντας τα πολύχρωμα λαστιχάκια, χωρίστε το σε 4 ίσα τετράγωνα  (Στο εσωτερικό του αρχικού τετραγώνου σας θα εμφανιστεί έτσι ένας σταυρός).

☞ Με ένα λαστιχάκι ενώστε τις 4 άκρες αυτού του σταυρού σχηματίζοντας ένα τετράγωνο.

☞ Μεταφέρετε το σχέδιο που φτιάξατε στον παρακάτω πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα.



Με πόσες τετραγωνικές μονάδες  ισούται το εμβαδόν του «μέσα» τετραγώνου που σχηματίσατε;

____

____

<u>Συμπέρασμα:</u>

🕮 Επομένως το «μέσα» τετράγωνο είναι το ________________του «έξω» τετραγώνου.

Ή αντίστροφα

🕮 Το «έξω» τετράγωνο είναι το ___________________του «μέσα» τετραγώνου.

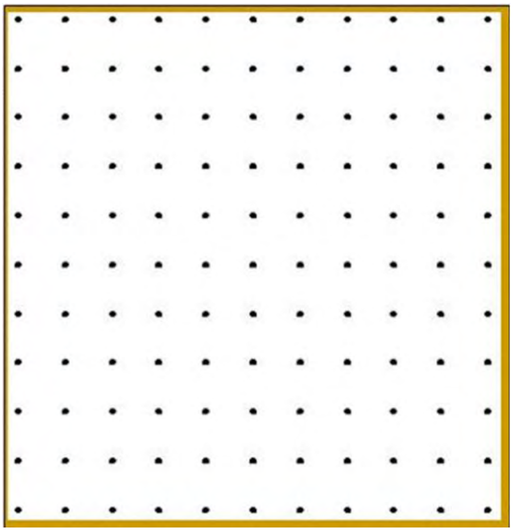
Φύλλο εργασίας 3

Ονοματεπώνυμο:……………………………..……………Ημερομηνία:…………………

☺ ***Δραστηριότητα 1:*** *«Το τετράγωνο με εμβαδόν 5 (= 1 + 4) στον γεωπίνακα»*

α) Με τη βοήθεια του συμμαθητή σου, σχεδιάστε στον γεωπίνακα που έχετε μπροστά σας, ένα ορθογώνιο τρίγωνο τέτοιο ώστε να μπορείτε να σχηματίσετε στις κάθετες πλευρές του ένα τετράγωνο με εμβαδόν 4 τετραγωνικές μονάδες και ένα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με 1 τετραγωνική μονάδα αντίστοιχα. Έπειτα σχηματίστε και το τετράγωνο που προκύπτει με πλευρά τη μεγαλύτερη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου.

- ☞ Μεταφέρετε να σχήματα αυτά στον παρακάτω πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα.



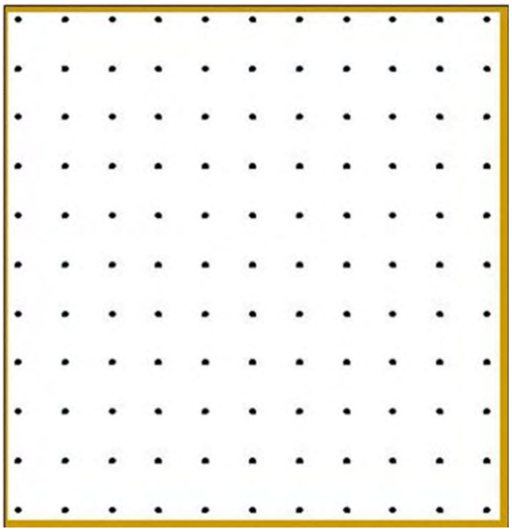
β) Με πόσες τετραγωνικές μονάδες ισούται το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά τη μεγαλύτερη πλευρά του αρχικού ορθογωνίου τριγώνου που σχεδιάσατε;

____

____

____

- Χρησιμοποιώντας τα λαστιχάκια, σχηματίστε στο εσωτερικού του τετραγώνου με πλευρά τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, ένα τετράγωνο ίσο με 1 τετραγωνική μονάδα.
- Έπειτα χρησιμοποιώντας λαστιχάκια σχηματίστε 4 ορθογώνια τρίγωνα στις περιοχές του τετραγώνου αυτού που βρίσκονται γύρω από το τετράγωνο με εμβαδόν 1 τετραγωνική μονάδα.
- Τέλος, μεταφέρετε αυτά τα 4 ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίσετε στον παρακάτω πίνακα αναπαράστασης του γεωπίνακα με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίσετε ένα τετράγωνο.
- Αντίστοιχα μεταφέρετε δίπλα σε αυτό το τετράγωνο, το τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με 1 τετραγωνική μονάδα.



γ) Παρατηρώντας προσεκτικά τα 2 τετράγωνα που σχεδιάσατε προηγουμένως, συγκρίνετε τα εμβαδά τους με τα εμβαδά των 2 τετραγώνων που σχηματίσατε στις δύο κάθετες πλευρές του αρχικού τριγώνου στο υπο-ερώτημα α. Τι παρατηρείτε;

____
____
____
____
____
____

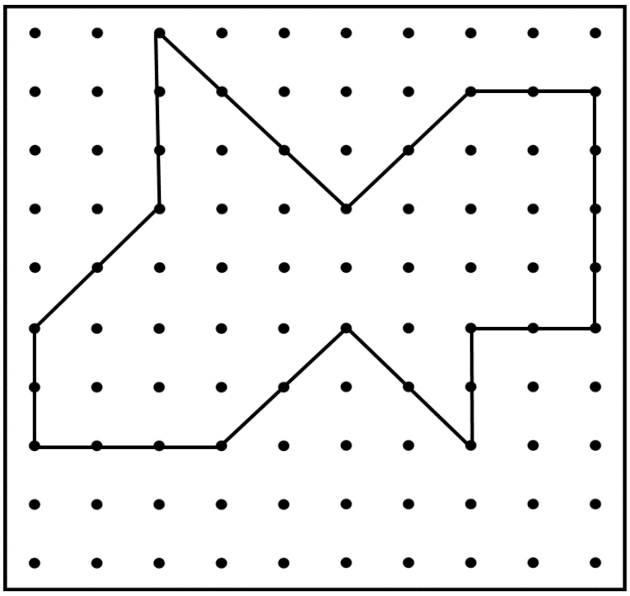
δ) Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγετε σχετικά με το εμβαδόν του τετραγώνου της μεγαλύτερης πλευράς του αρχικού τριγώνου και τα εμβαδά των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του;

____
____
____
____

Κάρτες 3ης δραστηριότητας – Φύλλο Εργασίας 1

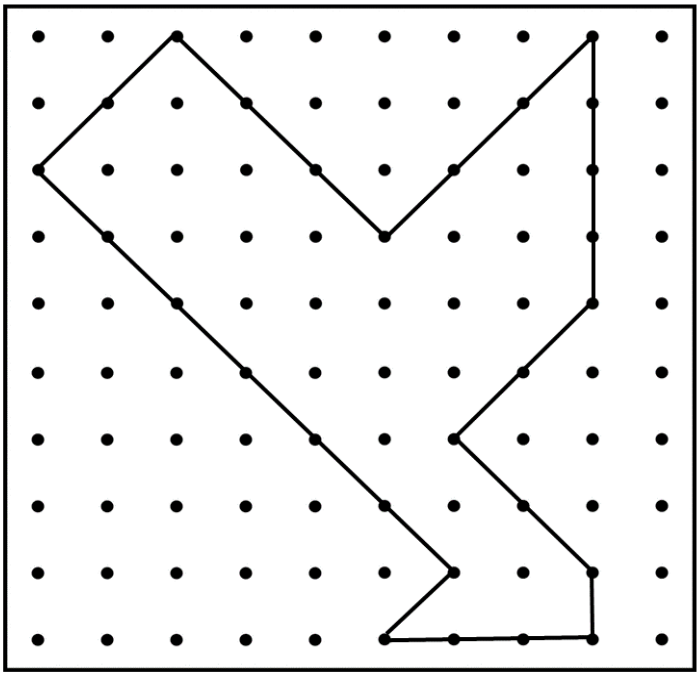
Το σχέδιο του οικοπέδου Α

Ονοματεπώνυμο ιδιοκτήτη:____



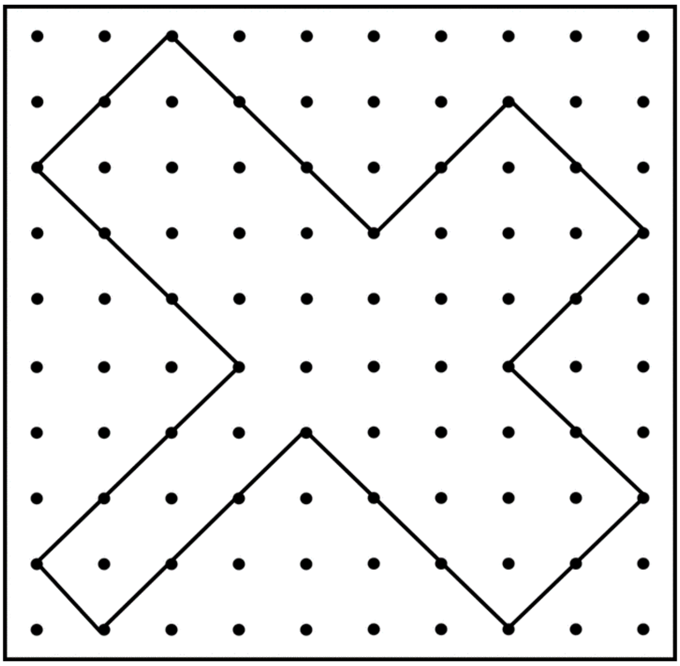
Το σχέδιο του οικοπέδου Β

Ονοματεπώνυμο ιδιοκτήτη:____



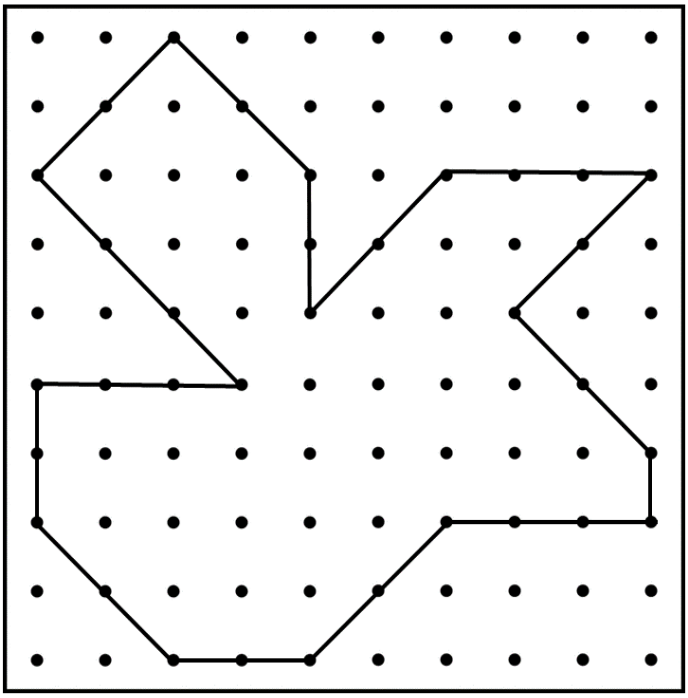
Το σχέδιο του οικοπέδου Γ

Ονοματεπώνυμο ιδιοκτήτη:____



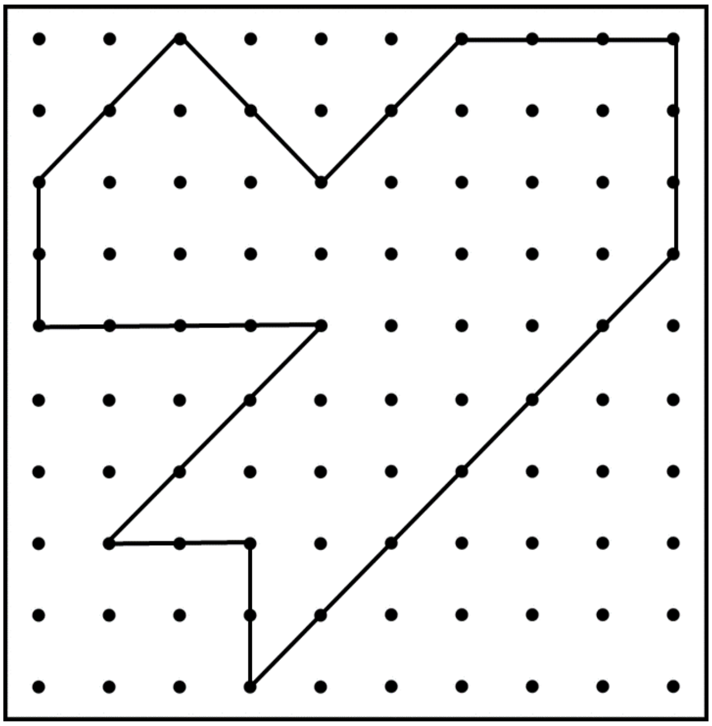
Το σχέδιο του οικοπέδου Δ

Ονοματεπώνυμο ιδιοκτήτη:____



Το σχέδιο του οικοπέδου Ε

Ονοματεπώνυμο ιδιοκτήτη:____



Πρωτόκολλο παρατήρησης

Το Πρωτόκολλο παρατήρησης συντάχθηκε σύμφωνα με βασικούς άξονες που αποτελούν παράγοντες επιτυχίας της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, όπως αναφέρει ο Ματσαγγούρας (2007) και η Καλδή (2010) και συμπληρώθηκε από την εξωτερική παρατηρήτρια κατά τη διεξαγωγή των διδακτικών παρεμβάσεων.

<u>Α) Αξιολόγηση της λειτουργικότητας των ομάδων εργασίας:</u>

- Υπάρχει άμεση διαπροσωπική επικοινωνία μεταξύ των μελών σε επίπεδο ομάδας και σε επίπεδο υπο-ομάδας;
- Τα μέλη της κάθε ομάδας έχουν συλλογική αντίληψη και αίσθηση ότι συνεργάζονται για να ικανοποιήσουν κοινούς στόχους και ανάγκες;
- Υπάρχει θετική αλληλεξάρτηση μεταξύ των μελών της κάθε ομάδας εργασίας; Αν όχι, ποια προβλήματα προέκυψαν;
- Τα μέλη της κάθε υπο-ομάδας αναλάμβανει ατομική και συλλογική ευθύνη κατά τη διεξαγωγή των δραστηριοτήτων; Υπάρχουν περιπτώσεις μαθητών που περιθωριοποιούνται από συμμαθητές του ή περιπτώσεις μαθητών που τείνουν να απέχουν οικειοθελώς από την ομαδική εργασία;
- Πώς θα μπορούσε να αξιολογηθεί η συνεργασία των μαθητών που ανήκουν στην ίδια υπο-ομάδα ως προς τη δραστηριότητά τους και τη χρήση του χειραπτικού υλικού; Πώς οι μαθητές μοιράζονται τη δραστηριότητα στα πλαίσια της ομάδας;
- Ο διάλογος μεταξύ των μαθητών που λαμβάνει χώρα κατά τη διάρκεια της ομαδικής εργασίας είναι διάλογος δράσης/ενέργειας για το υπό μελέτη θέμα ή «αφηρημένος» διάλογος;
- Η ανομοιογενής σύνθεση των ομάδων εργασίας και ο αριθμός των μελών κάθε ομάδας προωθεί ή παρακωλύει τη μαθησιακή διαδικασία;
- Προωθείται η αποκέντρωση της εξουσίας εντός της ομάδας ή υπάρχουν μαθητές που τείνουν να αναλαμβάνουν αρχηγικό ρόλο επηρεάζοντας αρνητικά την εργασία άλλων μαθητών;
- Γενική αξιολόγηση του ομαδοσυνεργατικού μοντέλου της τάξης. Προωθείται κλίμα έντονου ανταγωνισμού μεταξύ των διαφορετικών ομάδων εργασίας ως προς την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων;

<u>Β) Αξιολόγηση της ακαδημαϊκής εργασίας των μαθητών:</u>

- Οι μαθητές της ίδιας υπο-ομάδας κατορθώνουν να συνεργάζονται επιτυχώς με σκοπό την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων που τους έχουν ανατεθεί;
- Επιτυγχάνονται οι μαθησιακοί στόχοι που έχουν τεθεί, όπως αυτοί διαφαίνονται κατά την ενασχόληση των μαθητών με τις δραστηριότητες των Φύλλων Εργασίας; Θεωρείτε ότι η ομαδική εργασία επηρεάζει δυσχεραίνει την επίτευξη των γνωστικών στόχων που έχουν τεθεί;